

# ELECTRICITE

## 1 ELECTROSTATIQUE

Exercices corrigés

Mohamed AKBI

LICENCE  
INGENIORAT



# Exercices d'électrostatique



# **ELECTRICITE**

## **1 ELECTROSTATIQUE**

### **Exercices corrigés**

**Mohamed AKBI**  
Diplômé USTHB (Algérie)  
Docteur d'Université Blaise Pascal  
(Clermont-Ferrand, France)  
*Maître de conférences*

**LICENCE**  
**INGENIORAT**

**Du même auteur**

**Dans la collection Physique Générale**

## **ELECTRICITE**

Tome 1. Electromatique du vide. Cours et exercices corrigés, 332 pages

Tome 2. Electrocinétique, courant continu. Cours et exercices corrigés, 160 pages

Tome 3. Electromagnétisme, courant alternatif. Cours et exercices corrigés (à paraître)

**Dans la collection Physique :**

## **ELECTROSTATIQUE**

1. Charges et champs électriques. L'essentiel du cours et 50 exercices corrigés, 192 pages

2. Potentiel et énergie électrostatiques. L'essentiel du cours et 50 exercices corrigés, 288 pages

3. Théorème de Gauss et conducteurs. L'essentiel du cours et 50 exercices corrigés, 264 pages

©2006 par Mohamed AKBI, Alger  
Tous droits réservés

Première édition  
Alger, décembre 2006

N° Dépôt Légal 3281-2006

ISBN 9961-9381-3-2

Tous droits réservés. Toute réimpression ou utilisation non autorisée sans la permission écrite de l'éditeur est formellement interdite. Toute reproduction non autorisée sera poursuivie conformément aux lois, décrets et ordonnances en vigueur. Toute réimpression ou utilisation non autorisée sans la permission écrite de l'éditeur sera poursuivie conformément aux lois, décrets et ordonnances en vigueur. Toute réimpression ou utilisation non autorisée sans la permission écrite de l'éditeur sera poursuivie conformément aux lois, décrets et ordonnances en vigueur.

# TABLE DES EXERCICES

## 1. Charges électriques

E1. Interaction entre trois charges ponctuelles <sup>***</sup>	7
E2. Équations d'un système de charges étagées	10
E3. Distribution linéique de charges	18
E4. Distribution surfacique de charges	20

## 2. Champ électrostatique

E5. Champ électrique créé par deux charges ponctuelles <sup>*</sup>	28
E6. Champ électrique créé par un système de charges quadrupoles <sup>***</sup>	39
E7. Champ électrique créé par une ligne chargée uniformément <sup>***</sup>	33
E8. Champ électrique créé par un fil uniformément chargé infiniment long <sup>***</sup>	32
E9. Champ électrique créé par des distributions surfaciques de charges non uniformes	34

## 3. Potentiel et énergie électrostatiques

E10. Potentiel électrique créé par une distribution continue de charges ponctuelles <sup>*</sup>	39
E11. Calcul du champ à partir du potentiel <sup>***</sup>	41
E12. Potentiel électrique créé par deux arcs de cercles concentriques chargés <sup>***</sup>	43
E13. Potentiel au centre d'une courbe chargée uniformément	47
E14. Énergie potentielle électrostatique d'un système de charges quadrupoles <sup>***</sup>	44

## 4. Flux électrostatique - Théorème de Gauss

E15. Flux électrostatique créé par une charge ponctuelle <sup>***</sup>	45
E16. Champ et potentiel électrostatiques créés par deux sphères concentriques chargées en surface	47
E17. Flux chargé et principe de superposition <sup>***</sup>	53





# 1. Charges électriques

## Exercice 1<sup>er</sup> — La traction entre trois charges ponctuelles

On considère un plan  $xOy$ . Deux charges ponctuelles  $q_A = q_B = q'$  sont placées sur l'axe des  $x$ , respectivement aux points  $A$  et  $B$ , de coordonnées  $(a, 0)$  et  $(-a, 0)$ , comme indiqué sur la figure E1.

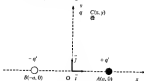


Fig. E1

1. Déterminer la force électrostatique résultante qui s'exerce sur une charge ponctuelle  $q$  située en un point quelconque  $C$  de coordonnées  $(x, y)$ , comme indiqué sur la figure E1.

On suppose  $q > 0$ ,  $q' > 0$  et  $q > q'$  de façon à négliger l'interaction entre les charges  $q'$ .

2. Refaire l'exercice dans le cas où  $q_A = q'$  et  $q_B = -q'$ .

**Solution :**

1. Dans la figure E1, à cet instant le diagramme des forces pour la charge  $q$ , il existe toutes les forces électriques qui agissent sur cette charge.

La charge  $q'$  située en  $A$  dans positive, elle interagit avec la charge  $q$  (également positive) située en  $C$ , avec une force électrostatique repulsée  $\vec{F}_{AC}$  :

$$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{r_{AC}^2} \vec{r}_{AC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(AC)^2} (-\cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j})$$

avec  $\vec{u}_{AC} = -\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

En outre,  $\cos\theta = \frac{MB}{AC} = \frac{MB}{\sqrt{(AM)^2 + (MC)^2}} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} = \sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{z}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}}$

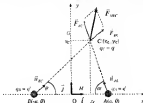


Fig. E1.1

D'où 
$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(x-a)^2 + z^2} \left( -\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(x-a)^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{[(x-a)^2 + z^2]^{3/2}} (z, -a)^T \end{aligned}$$

La charge  $q'$  située en B étant positive, elle interagira avec la charge  $q$  (positive) située en C, avec une force électrostatique attractive  $\vec{F}_{BC}$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{BC} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{r_{BC}^2} \vec{u}_{BC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(BC)^2} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(AM)^2 + (MC)^2} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) \end{aligned}$$

avec  $\vec{u}_{BC} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

$$\cos\theta = \frac{MB}{BC} = \frac{MB}{\sqrt{(AM)^2 + (MC)^2}} = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{MC}{BC} = \frac{MC}{\sqrt{(MB)^2 + (MC)^2}} = \frac{z}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}}$$

D'où 
$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(x+a)^2 + z^2} \left( \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(x+a)^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{[(x+a)^2 + z^2]^{3/2}} ((x+a)^2 + z, z)^T \end{aligned}$$

Pour déterminer la force électrique qui s'applique sur la charge  $q$ , on applique le principe de superposition. Ce qui revient à faire la somme vectorielle des forces  $\vec{F}_{12}$  et  $\vec{F}_{23}$ .

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23}$$

On obtient :

$$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{((x_1 - a)\vec{i} + y_1\vec{j})}{[(x_1 - a)^2 + y_1^2]^{3/2}} - \frac{((x_1 + a)\vec{i} + y_1\vec{j})}{[(x_1 + a)^2 + y_1^2]^{3/2}} \right]$$

2. Dans la figure E1.2, on a représenté diagramme des forces pour la charge  $q$ , dans le cas où  $q_1 = +q'$  et  $q_2 = -q'$ . Il montre toutes les forces électriques qui agissent sur cette charge.

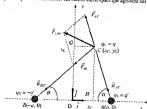


Fig. E1.2

En effectuant un raisonnement analogue au précédent, on trouve :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{[(x_1 - a)^2 + y_1^2]^{3/2}} ((x_1 - a)\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$\vec{F}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{[(x_1 + a)^2 + y_1^2]^{3/2}} ((x_1 + a)\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{((x_1 - a)\vec{i} + y_1\vec{j})}{[(x_1 - a)^2 + y_1^2]^{3/2}} - \frac{((x_1 + a)\vec{i} + y_1\vec{j})}{[(x_1 + a)^2 + y_1^2]^{3/2}} \right]$$

### Exercice 2 \*\* — Equilibre d'un système de charges triangulaire.

On dispose des charges ponctuelles identiques  $q$  (ou grandeurs et en signe) aux sommets d'un triangle équilatéral de côté  $a$  (Fig. E2).



Fig. E2

Quelle charge ponctuelle  $Q$  de signe contraire faut-il placer au centre du triangle pour que la résultante de toutes les forces qui agissent sur chacune de ces charges soit égale à zéro ?

#### Solution

Dans la figure adj., on a représenté le diagramme des forces pour la charge  $q_1$ . Il ressort toutes les forces électrostatiques qui agissent sur cette charge.

Les charges situées aux sommets du triangle (ou triangle rectangle) sont toutes positives, les forces  $P_{12}$  et  $P_{13}$  sont, par conséquent, répulsives. Pour que la charge  $Q$  placée au centre du triangle équilatéral soit en équilibre, il faut que la force  $P_{14}$  soit attractive, égale et opposée à la résultante  $P'_{123}$ . Par conséquent, la charge  $Q$  doit être négative.

Exprimons ces forces sous leurs formes vectorielles, en remarquant, d'après la figure E2.1, que :

$$\alpha = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{et} \quad r_{12} = r_{13} = a;$$

$$r_{14} \cos \alpha = \frac{a}{2} \Rightarrow r_{14} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \Rightarrow r_{14} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow r_{14} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{P}_{123} &= P_{12} (\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j}) + P_{13} (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left( \frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right) \end{aligned}$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{q^2}{(r_{12})^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

$$\begin{aligned} P_{23} &= F_{23} (-\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} (-\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{r^2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right) \end{aligned}$$

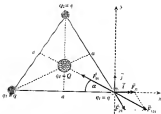


Fig. E2.1

Pour obtenir la valeur de la charge  $Q$  (négative), on écrit les conditions d'équilibre, on applique le principe de superposition. Ce qui revient à faire la somme vectorielle des forces  $P_{21}$  et  $P_{31}$ .

$$P_{21} = P_{31} + P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3} q^2}{r^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} \right)$$

A l'équilibre,

$$\sum_i \vec{P}_i = \vec{P}_{21} + P_{12} = 0 \Rightarrow P_{21} = -P_{12}$$

Alors, on peut écrire:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3} q^2}{r^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{r^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} \right)$$

En simplifiant par  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3} q^2}{r^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} \right)$ , on obtient:  $Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}$

La charge  $q$  est de signe opposé à celle des autres charges; elle est négative et vaut:

$$\boxed{Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}}$$

2. Soient les valeurs initiales des charges  $q_1$  et  $q_2$  ou leurs  $q_1$  et  $q_2$  initiales, soit un indice dans le système. Les charges sont posées respectivement à la fin des charges  $q_1$  et  $q_2$  dans la figure 1.2.1.

### Exercice 3 <sup>2000</sup> — Distribution linéique de charges

On considère un segment portant une densité linéique de charges  $\lambda = \lambda x^2$ , où  $\lambda$  est une constante (Fig. E3).

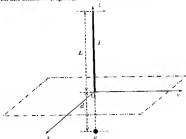


Fig. E3

1. Donner les dimensions de la constante  $\lambda$ .
2. Quelle est la charge totale  $Q$  portée par le segment?
3. Trouver la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur une charge ponctuelle  $q$  placée au centre  $O(0,0,0)$ .
4. Trouver la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur la charge ponctuelle  $q$  placée cette fois en un point  $M(b, 0, -a)$  de l'axe  $Oz$ .
5. Si le point  $M$  s'éloigne du point  $O$  ( $b \gg L$ ), montrer que la force trouvée en (4) se ramène à une force coulombienne qui s'exerce entre deux charges ponctuelles distantes de  $L$ .

## Solution :

1. En utilisant l'équation de la densité linéaire, on obtient :

$$\lambda(z) = \frac{|Q|}{L} = \frac{\left[ \frac{\text{Charge}}{\text{Longueur}} \right]}{\left[ \frac{\text{Longueur}}{L} \right]} = \frac{|\text{Charge}|}{|\text{Longueur}|}$$

Dans le système international, les dimensions de la constante  $\lambda$  sont :

$$[\lambda] = \frac{\text{Coulombs}}{\text{mètre}} = \frac{C}{m}$$

2. On divise le segment de longueur  $L$  et de charge  $q$  en éléments de longueur  $dl$  et de charge  $q_l$  (Fig. 13). Chaque élément  $dl$  du segment porte une charge  $q_l = \lambda dl$ .

Pour déterminer la charge totale portée par le segment, on applique le principe de superposition et l'on considère dans ce cas à faire la sommation (intégration de  $l = 0$  à  $l = L$ ) de toutes les charges infinitésimales réparties sur la longueur  $L$  du segment.

Ence, la charge totale portée par le segment s'obtient par intégration de  $z = 0$  à  $z = L$ , de l'expression :

$$Q = \int_0^L \lambda dz$$

Certains :  $\lambda = \lambda(z)$

$$\text{On obtient : } Q = \int_0^L \lambda z^2 dz = \lambda A \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^L \Rightarrow \boxed{Q = \lambda \frac{L^3}{3}}$$

3. La force électrostatique  $d\vec{F}$  exercée par la charge élémentaire  $q_l = \lambda dz$ , située en  $P$ , sur la charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  tel que  $\vec{PO} = -z \vec{e}$ , s'exprime :

$$d\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \lambda dz}{r^2} \vec{e} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \lambda z^2}{z^3} dz \vec{e} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \lambda dz \vec{e}$$

En appliquant le principe de superposition, la force électrostatique résultante exercée sur la charge ponctuelle  $q$  placée au point  $O$ , s'obtient en intégrant cette expression de  $z = 0$  à  $z = L$  :

$$\vec{F} = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L dz \vec{e} = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ z \right]_0^L \vec{e}$$

Finalement, on obtient :

$$\vec{F} = -\frac{q\lambda L}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}$$

La charge totale portée par le segment étant égale à  $Q = \lambda \frac{L^3}{3}$ , on trouve finalement :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L dz \vec{e} = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ z \right]_0^L \vec{e}}$$

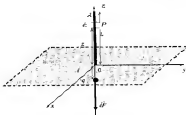


Fig. E3

4. Dans le cas où la densité linéique de charges  $\lambda$  est constante, la force électrostatique  $d\vec{F}$  exercée par la charge élémentaire  $dQ = \lambda dz$ , sur la charge ponctuelle  $q$ , s'écrit :

$$d\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \lambda dz}{(PO)^2} \vec{e} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \lambda}{(z+d)^2} dz \vec{e}$$

La force résultante exercée par tous les éléments du segment qui sont à des distances différentes de  $P$ , est donnée par :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \lambda \int_L^U \frac{dz}{(z+d)^2} \vec{e} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \lambda \left[ -\frac{1}{z+d} \right]_L^U \vec{e}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \lambda \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{L+d} \right] \vec{e} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \lambda L}{d(L+d)} \vec{e}$$

Donc : 
$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d(L+d)} \vec{e}$$

5. Si le point  $M$  est loin du point  $O$ , c'est-à-dire  $d \gg L$ , alors  $L+d \approx d$  et la force électrostatique devient :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d^2} \vec{e}$$

C'est l'expression de la force électrostatique qui s'exerce entre deux charges ponctuelles  $Q$  et  $q$ , séparées par une distance  $d$ .

Dans ces conditions, le segment chargé devient équivalent à une charge ponctuelle de grandeur  $Q$  placée à une distance  $d$  de la charge  $q$ .



Exercices 4<sup>ème</sup> — Distribution surfacique de charges

1. On considère un disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ , chargé avec la densité surfacique de charges  $\sigma = C r^2$ , où  $C$  est une constante. Donner les dimensions de la constante  $C$  (Fig. E4).



Fig. E4

1. Donner les dimensions de la constante  $C$ .
2. Quelle est la charge totale  $Q$  portée par le disque ?
3. Trouver la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur une charge ponctuelle  $q$  placée en un point  $M$  quelconque de l'axe  $Oz$ .

**Solution :**

1. En utilisant l'équation aux dimensions, on obtient :

$$[A] = \left[ \frac{[\sigma]}{[r^2]} \right] = \left[ \frac{\left[ \frac{\text{Charge}}{\text{Surface}} \right]}{[\text{Longueur}^2]} \right] = \left[ \frac{\left[ \frac{\text{Charge}}{\text{Longueur}^2} \right]}{[\text{Longueur}^2]} \right] = \left[ \frac{[\text{Charge}]}{[\text{Longueur}^4]} \right]$$

Dans le Système International, les dimensions de la constante  $A$  sont :  $[A] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{mètre}^4} = \frac{C}{m^4}$

2. On divise le disque de surface  $S$  et de charge  $q$ , en éléments de surface  $dS$  et de charge  $dq$  (Fig. E4.1)

Pour déterminer la charge totale portée par le disque, on applique le principe de superposition qui consiste, dans ce cas, à faire la sommation (double intégration de  $r = 0$  à  $r = R$  et de  $\varphi = 0$  à  $\varphi = 2\pi$ ) de toutes les charges élémentaires situées sur la surface  $S$  du disque.

Donc, la charge totale portée par le disque s'obtient par une double intégration de  $r = 0$  à  $r = R$ , et de  $\varphi = 0$  à  $\varphi = 2\pi$  de l'expression :

$$Q = \int_S \sigma dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma r dr d\varphi$$

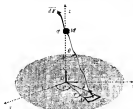


Fig. B4.1

Comme:  $\sigma = A \cdot r^2$

On obtient:

$$Q = A \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Finalement, on trouve  $Q = \pi A \frac{R^3}{3}$

3. On calcule la force électrostatique élémentaire exercée par un élément de surface chargé  $dQ$  sur la charge ponctuelle  $q$  (Fig. B4.1).

Cet élément de surface porte une charge élémentaire:

$$dq = \sigma r dr d\varphi$$

La charge élémentaire  $dQ$  exerce une force électrostatique élémentaire  $\overline{dF}$  (Fig. B4.2) dont le module:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dQ}{r'^2 + z^2}, \quad \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \sigma r dr d\varphi}{r'^2 + z^2} \vec{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \sigma r dr d\varphi}{r'^2 + z^2} (\cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{r}) \end{aligned}$$

On obtient

$$\vec{dF} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \sigma r dr d\varphi}{r'^2 + z^2} \left( \frac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \vec{k} - \frac{r}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \vec{r} \right)$$

avec  $\vec{r} = \cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{r}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$

et  $\vec{r} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$



Fig. E4.2

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 d\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \, dS \, \vec{r}}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2+z^2}^3} \left( -\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \vec{k} + \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} (\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}) \right) \\
 \vec{E} &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^R \frac{-z}{\sqrt{r^2+z^2}^3} r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{k} - \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r^2+z^2}^3} dr' \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \vec{i} - \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r^2+z^2}^3} dr' \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \vec{j} \right) \\
 \vec{E} &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^R \frac{-z}{\sqrt{r^2+z^2}^3} r' dr' \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} \vec{k} - \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r^2+z^2}^3} dr' \left[ \sin\varphi \right]_0^{2\pi} \vec{i} - \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r^2+z^2}^3} dr' \left[ -\cos\varphi \right]_0^{2\pi} \vec{j} \right) \\
 \vec{E} &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}^3} r' dr' 2\pi \vec{k} + \frac{qA}{\epsilon_0} z \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r^2+z^2}^3} dr' \vec{k} \right)
 \end{aligned}$$

Les composantes radiales  $E_r$  et  $E_\varphi$  s'annulent à cause de la symétrie de révolution autour de l'axe des  $z$ .

L'expression de la force électrostatique peut alors s'écrire :

$$\vec{F} = \frac{qA}{2\epsilon_0} \left[ \frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} \right]_0^R \vec{k}$$

La force électrostatique exercée par le disque sur la charge ponctuelle  $q$  se met finalement sous la forme :

$$\vec{F} = \frac{qA}{2\epsilon_0} \left[ \frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} - 2z \right] \vec{k}$$

## 2. Champ électrostatique

### Exercice 5 : Champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles

On considère deux charges ponctuelles  $q'$  et  $-q'$  placées sur l'axe des  $x$ , respectivement à l'origine  $O(0,0)$  et au point  $A$  de coordonnées  $(4,0)$  m (voir la figure E5).

1. Déterminer le champ électrique au point  $M$  de coordonnées  $(0,3)$  m.
2. Déterminer la force électrostatique exercée sur une charge  $q$  placée en  $M$ .

On suppose  $q > 0$ ,  $q' > 0$  et  $q \gg q'$  de façon à négliger l'interaction entre les charges  $q'$ .

Applications numériques :  $q' = 10^{-8}$  C;  $q = 10^{-6}$  C.

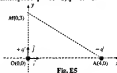


Fig. E5

Réponses :

1.  $\vec{E}_M = (2,38 \vec{i} + 7,34 \vec{j}) \text{ [V} \cdot \text{m}^{-1}\text{]}$ ; on en déduit que le champ électrique  $\vec{E}_M$  a :
  - a. une grandeur  $|\vec{E}_M| = \sqrt{(2,38)^2 + (7,34)^2} = 7,73 \text{ [V} \cdot \text{m}^{-1}\text{]}$
  - b. et fait un angle  $\theta = \arctan\left(\frac{7,34}{2,38}\right) = 69,5^\circ$  avec la partie positive de l'axe des  $x$
2.  $\vec{F}_e = q \vec{E}_M = (2,38 \vec{i} + 7,34 \vec{j}) \text{ [}\mu\text{N}]$  dans la même direction que  $\vec{E}$ .

**Exercice 6 :** Champ électrostatique créé par un système de charges quadrupolaires :

On dispose des charges ponctuelles  $Q_1 = Q_2 = Q$  et  $Q_3 = Q_4 = -2Q$ , aux sommets d'un carré de côté  $a$ .

Déterminer le champ électrostatique au centre  $O$  du carré.

Application numérique :  $Q = 1,6.10^{-8}$  C,  $a = 4\sqrt{2}$  m.

**Solution :**

La figure E6 montre les vecteurs champs électrostatiques créés par chacune des quatre charges.



Fig. E6

On applique le principe de superposition pour le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^4 \vec{E}_i$$

Les champs électrostatiques s'écrivent respectivement

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} \vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} (-\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a^2} (-\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} \vec{u}_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} \vec{u}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} (-\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

Le champ  $\vec{E}$  électrostatique créé au centre  $O$  est donc :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{12Q}{a^2} \cos\theta \vec{i}$$

$$\text{Or } \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalement, on obtient

$$E(P) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{3\sqrt{3}Q}{a^2} \vec{r}$$

Application numérique :  $Q = +4,6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ;  $a = 4\sqrt{3} \text{ m}$

$$E(P) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{3\sqrt{3} \cdot 4,6 \cdot 10^{-8}}{12} \vec{r} = \boxed{E(P) = -3,82 \cdot 10^{-12} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \vec{r}}$$

- L'analyse des systèmes permet de trouver l'orientation du champ électrique. En effet l'axe  $Oy$  étant un axe d'antisymétrie, le champ électrique total est perpendiculaire à ce  $Oy$ .

### Exercice 3 <sup>\*\*\*</sup> — Champ électrique créé par une tige chargée uniformément

Une tige métallique de longueur  $l$  porte une charge  $Q$  répartie uniformément avec la densité de charges  $\lambda$ .

1. Déterminer le champ électrostatique en un point  $O$  situé sur l'axe de la tige à une distance  $r$  d'une des extrémités (Fig. E7).

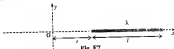


Fig. E7

2. Un électron se déplaçant d'une distance  $d$  le long d'une ligne de champ d'un point  $A$  à un point  $B$  verra sa vitesse changer de  $v_A$  à  $v_B$ . On considérera que le point  $O$  se trouve loin du fil.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

Application numérique :  $l = 10 \text{ cm}$  ;  $r_A = 100 \text{ cm}$  ;  $r_B = 104 \text{ cm}$  ;  $v_A = 2,10^7 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $v_B = 3,10^7 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$  ;  $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$ .

Solution :

1. On divise la tige de longueur  $l$  en de charge  $Q$ , en éléments de longueur  $dl$  de charge  $dQ$  (Fig. E7.1). Chaque élément  $dl$  de la tige porte une charge  $dQ = \lambda dl = \lambda dx$



Fig. E7.1

Le champ électrostatique  $\vec{dE}$  créé par la charge élémentaire  $dQ = \lambda dx$  s'écrit :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} dx$$

Pour obtenir le champ électrostatique créé par la tige chargée, on applique le principe de superposition qui consiste à faire la sommation (intégrales de  $x = r$  à  $x = r+l$ ) de tous les champs électrostatiques créés par les charges élémentaires  $dQ$  réparties sur la longueur de la tige.

Le champ électrique résultant créé par tous les éléments de la tige qui sont à des distances différentes de  $O$ , s'obtient par intégration de  $x = r$  à  $x = r+l$  de l'expression :

$$d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int \frac{dx}{(x)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[ -\frac{1}{x} \right]_r^{r+l} \Rightarrow E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r+l} \right]$$

Donc 
$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r(r+l)} \vec{r}$$

2. Lorsque la tige est loin du point  $O$  ( $r \gg l$ ), le champ électrique qu'elle crée au point  $O$  est donné par :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r^2} \vec{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

■ Quand  $r$  est très grand devant  $l$ , la tige électrique est équivalente à une charge ponctuelle  $Q = \lambda l$ .

Si l'électron se trouve en  $A$  où règne le champ électrique  $\vec{E}$ , il va être soumis à la force électrostatique :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\lambda l}{r^2} \vec{r}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire  $\vec{dr}$  du proton, la force électrostatique effectuera un travail élémentaire  $dW$  donné par :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = +e\lambda l \vec{r} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\lambda l}{r^2} r \left( \frac{dr}{r} \right) = + \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

Au cours du déplacement du proton de  $A$  vers  $B$ , le travail effectué est donné par :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = + \int_{r_1}^{r_2} \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Où trouve :  $W_{A \rightarrow B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$

D'après la définition de l'énergie cinétique, on a :

Travail de la force électrostatique = variation de l'énergie cinétique

Donc 
$$W_{A \rightarrow B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

On en déduit la formule classique de charges  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r \left( \frac{r_2^2}{d} - \frac{r_1^2}{d} \right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Application numérique :  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 100 \text{ nm}$ ,  $r_1 = 10 \text{ nm}$ ,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ ,  $U_0 = 1,0 \text{ kV}$ ,  $Q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $n_0 = 1,1 \times 10^{23} \text{ kg}^{-1}$ .

$$\lambda = \frac{2\pi \times 10 \times 8,85 \times 10^{-12} \left( \frac{(100)^2}{10} - \frac{(10)^2}{10} \right)}{\ln\left(\frac{100}{10}\right)}$$

Finalement, on trouve :  $\lambda = 2,44 \times 10^{-14} \left[ \frac{\text{C.m}^{-1}}{\text{m}} \right] = 2,44 \times 10^{-14} \left[ \mu\text{C.m}^{-1} \right]$

### Exercice 3<sup>ème</sup> — Champ électrique créé par un fil uniformément chargé infiniment long

Un fil métallique infiniment long est chargé uniformément avec la densité de charges  $\lambda$ .

1. Déterminer le champ électrostatique en un point A situé sur la médiatrice du fil à une distance  $r$  de son milieu O (Fig. E8).

2. Une charge électrique positive  $q$  se trouve au point A. Sous l'action du champ électrique créé par le fil métallique chargé, elle se déplace d'une distance  $d = AB$  (Fig. E8); un travail  $W$  s'effectue au cours de ce déplacement.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

Application numérique :  $q = 3,10^{-6} \text{ C}$ ;  $OA = r_A = 2 \text{ cm}$ ;  $OB = r_B = 6 \text{ cm}$ ;  $W = 10^{-5} \text{ J}$ .

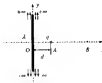


Fig. E8

**Solution :**

1. On se propose de trouver le champ électrostatique créé en un point M par un fil métallique rectiligne infini uniformément chargé. À priori, le champ de longueur (Fig. E8.1).



Pour ce filon droit, le filament est pris en segments de longueur  $dl$  portant chacun une charge  $dlq = \lambda dl$ .

On suppose le champ électrostatique  $\vec{dE}_1$  créé par la charge élémentaire  $dq_1 = \lambda dl_1$  étudié en  $P_2$  en un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = r$ .

$$\vec{dE}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^3 + z^2} (\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_z)$$

Le champ électrostatique  $\vec{dE}_2$  créé en  $M$  par la charge élémentaire  $dq_2 = \lambda dl_2$  située en  $P_1$  (symétrique de  $P_2$  par rapport à  $OC$ ), s'obtient de la même façon,

$$\vec{dE}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^3 + z^2} \vec{r}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^3 + z^2} (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_z)$$

Le champ électrostatique  $\vec{dE}$  créé en  $M$  par la paire de charges élémentaires ( $dq_1, dq_2$ ) a pour expression :

$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda dl}{r^3 + z^2} (\cos\theta \vec{u}_r) = dE_r \vec{u}_r$$

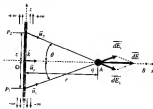


Fig. E8.1

$$\text{avec} \quad dE_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dl}{r^3 + z^2} \cos\theta$$

En appliquant le principe de superposition, le champ électrostatique résultant au point  $M$ , s'obtient en intégrant cette expression de  $\theta = 0$  à  $\theta = \alpha/2$ .

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha/2} \frac{dl}{r^3 + z^2} \cos\theta$$

$$\text{Comme} \quad \cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

soit  $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}$

En utilisant

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad r = \frac{a}{\sin \theta}$$

En substituant  $r^2$  et  $d\Omega$  par leurs expressions respectives dans celle de  $E_a$ , on obtient

$$E_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\pi} \cos \theta \, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} [\sin \theta]_0^{\pi} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

D'où  $\boxed{E = E_a \, \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \, \vec{e}_r}$

2. La charge électrique  $q$  placée en  $A$  subit le champ électrique  $\vec{E}$ , ce qui correspond à la force électrostatique

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \, \vec{e}_r$$

Au cours d'un déplacement élémentaire  $\vec{dr}$  de la charge électrique  $q$ , le travail électrostatique effectué en travers d'élémentaire  $dW$  donne par

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \, \vec{e}_r \cdot \vec{dr} \, e_r = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \, dr$$

Au cours de déplacement de la charge  $q$  de  $A$  vers  $B$ , le travail effectué est donné par

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_A^B \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \, dr = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} [\ln r]_a^{2a} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{2a}{a}$$

On en déduit la densité linéique de charges  $\lambda$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 a W}{q \ln \frac{2a}{a}}}$$

Application numérique :  $q = 3,10^{-5} \text{ C}$ ,  $AB = a_2 = 7 \text{ cm}$ ,  $CB = a_1 = 6 \text{ cm}$ ,  $W = 10^{-3} \text{ J}$

$$\lambda = \frac{2}{9 \cdot 10^9} \frac{1}{3 \cdot 10^{-5}} \frac{1}{\ln 2} \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{\lambda = 6,75 \cdot 10^{-7} \text{ [C} \cdot \text{m}^{-1}\text{]}}$$

## Exercice 9 \*\*\* — Champ électrique créé par des distributions surfaciques de charges non uniformes

A. On électrise par frottement un disque circulaire en ébonite qui tourne à une vitesse constante dans un plan horizontal. De cette façon, la densité surfacique de charges devient proportionnelle à la distance  $r$  du centre du disque ( $\sigma = \lambda \, r$ , où  $\lambda$  est une constante négative).

1. Exprimer la charge totale  $Q$  de la couronne en fonction de  $A$ ,  $R_2$  et  $R_1$ . Donner les dimensions de la constante  $A$ .
2. Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ électrostatique au centre  $O$ .
3. Exprimer le champ électrostatique  $E$  en un point  $M$  situé sur l'axe de la couronne à une distance  $z$  de  $O$ .

B. Une couronne découpée dans un disque de verre (rayons intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ ) porte une charge  $Q$  distribuée avec la densité surfacique de charges  $\sigma = \sigma_0 r \text{ C.m}^{-2}$  ( $\sigma_0$  est une constante positive) (Fig. E9).

1. Exprimer la charge totale  $Q$  de la couronne en fonction de  $\sigma_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
2. Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ électrostatique au centre  $O$ .
3. Exprimer le champ électrostatique  $E$  en un point  $M$  situé sur l'axe de la couronne à une distance  $z$  de  $O$ .

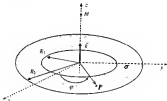


Fig. E9

**Solution :**

A. 1. On divise le disque de rayon  $R_2$  en anneaux élémentaires de rayon intérieur  $r$  et d'épaisseur  $dr$ . Chaque anneau porte une charge élémentaire

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Pour déterminer la charge totale  $Q$  portée par le disque, on fait la sommation (intégration de  $r = 0$  à  $r = R$ ) de toutes les charges élémentaires réparties sur la surface du disque.

La charge totale  $Q$  portée par le disque se trouve s'obtenir par intégration de  $r = 0$  à  $r = R$  de l'expression suivante, avec la valeur appropriée de  $\sigma$

$$Q = \iint_A \sigma \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma \, r \, dr \, d\varphi$$

avec  $\sigma = A/r$ .

Donc 
$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R A \, dr \, d\varphi$$

Pir conséquent :

$$Q = \iint_A \sigma \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R A \, dr \, d\varphi = A \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Finalement, on obtient : 
$$Q = \frac{2}{3} A \pi R^2$$

En utilisant l'équation aux dimensions, on déduit : 
$$[A] = \frac{[Q]}{\left[ \frac{2}{3} \pi R^2 \right]} = \frac{[Charge]}{[Longueur^2]}$$

Dans le système international, les dimensions de la constante  $A$  sont :

$$[A] = \frac{Constante \cdot C}{surface} = \frac{C}{m^2}$$

A 2. La distribution est invariante dans toute section circulaire de l'axe  $z$  (Fig. E9.1), c'est une symétrie axiale.

• En tout point de l'axe  $Oz$ , le champ électrostatique  $\vec{E}$  est point par l'axe, il ne dépend que de  $z$ .

Les plans  $(xOz)$  et  $(yOz)$  sont des plans de symétrie; de même, tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan de symétrie, le plan  $(xOy)$  est également un plan de symétrie. Le point  $O$  appartient à des plans de symétrie orthogonaux: c'est un centre de symétrie.

• Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est nul au point  $O$ .

A 3. On calcule le champ électrostatique élémentaire créé par un élément de surface uniformément chargé  $dQ$ .

Cet élément de surface porte une charge élémentaire

$$dQ = \sigma \, r \, dr \, d\varphi$$

La charge élémentaire  $dQ$  crée un champ électrostatique élémentaire  $\vec{dE}$  (Fig. E9.2)

$$\begin{aligned} \vec{dE} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2 + z^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A \, r^2 \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \vec{u} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A \, r^2 \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} (\cos\theta \vec{e}_z - \sin\theta \vec{e}_r) \end{aligned}$$

Enfinement, on déduit :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A \, r^2 \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \left( \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{e}_z - \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{e}_r \right)$$

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \varphi \quad , \quad \sin \theta = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad , \quad \sin \theta' = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\vec{r} = r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j}$$

Par conséquent

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A r^2 dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \left( \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{k} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \right)$$

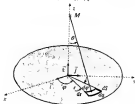


Fig. E9.1

Les composantes radiales  $E_r$  et  $E_\theta$  s'annulent à cause de la symétrie de révolution autour de l'axe des  $z$ . Le champ électrostatique résultant  $\vec{E}$  a pour direction  $Oz$ .

Dans la composante axiale du champ électrostatique résultant on trouve par

$$\vec{E} = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^R \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \vec{k}$$

Posez  $u = r^2 + z^2$ , alors  $du = 2r dr$ . L'expression du champ électrostatique peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{A z}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_z^{R^2 + z^2} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \vec{k} \\ &= \frac{A z}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_z^{R^2 + z^2} \ln \left( r + \sqrt{r^2 + z^2} \right) - \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^{R^2 + z^2} \left[ \frac{2\pi}{z} \right] \vec{k} \\ \vec{E} &= \frac{A z}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} \right) - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k} \end{aligned}$$

Enfin, que  $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{2\pi \lambda r \ell^2}{\ell R}$  et  $\frac{1}{\ell} A \ell$ , la constante  $A'$  s'écrit  $A' = \frac{1}{2\pi \ell^2}$ .

Le champ électrostatique créé par la distribution est donc la force

$$\vec{E} = - \frac{Q_0 \varepsilon_0}{4\pi \varepsilon_0 R} \left[ \ln \left( \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} \right) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

4. Le champ électrostatique créé par une couronne déchargée (sans un centre de symétrie) (voir Fig. E9.2) portant une charge  $Q$  distribuée avec la densité surfacique de charges  $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \varphi$  (où  $\sigma_0$  est une constante positive) se calcule de la même manière que pour le disque.

Les réponses sont les suivantes :

B.1.  $Q = \frac{1}{2} \sigma_0 R \left( R_2^2 - R_1^2 \right)$

D.2. voir A.2

B.3.  $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} \right] \vec{e}_z = - \frac{2Q}{4\pi \varepsilon_0 \left( R_2^2 - R_1^2 \right)} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} \right] \vec{e}_z$

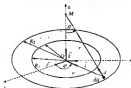


Fig. E9.2

# 3. Potentiel et énergie électrostatiques

**Exercice 10** — Potentiel électrique créé par une distribution cubique de charges ponctuelles

On considère huit charges ponctuelles  $Q$  placées aux sommets d'un cube d'arête  $a$  (voir la figure E10).

1. Déterminer le potentiel électrostatique au centre  $O$  du cube.

On prendra le potentiel nul à l'infini ( $V(\infty) = 0$ ).

2. Déterminer le potentiel électrostatique créé à chaque sommet du cube par les sept autres charges électriques.

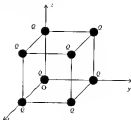


Fig. E10

**Solution :**

1. Calculons l'origine des potentiels électrostatiques. On suppose que les charges positives par exemple se trouvent au centre. On place charges positives aux huit sommets du cube (Fig. E16.1).

$$V_1 = \sum_{i=1}^8 V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 8V$$

avec  $V_i = V_1 = \dots = V_8 = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{3}}$ , la distance entre par exemple les charges au point O.

Pour obtenir ce résultat :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a\sqrt{3}}$$

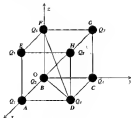


Fig. E16.1

On remarque par exemple que la diagonale FD vaut :

$$FD = \sqrt{OD^2 + OF^2}$$

$$\text{soit } OD = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2} = \sqrt{a^2/2 + a^2/2} = a\sqrt{2}$$

Par conséquent,

$$FD = \sqrt{OD^2 + OF^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$



2. On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel créé en un point  $M$  par les charges ponctuelles  $q$  et les sept autres charges du cube (Fig. E12, i).

$$V = \sum_{i=1}^8 V_i = V + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7$$

$$\text{and } V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}; \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{2}};$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}; \quad V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a};$$

$$V_5 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{2}}; \quad V_6 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{2}};$$

$$V_7 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, on obtient:

$$V = 7 \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a\sqrt{2}}$$

Finalement, on trouve:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \left[ 7 + \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

### Exercice 11 Calcul du champ à partir du potentiel

On considère trois charges ponctuelles disposées comme le montre la figure E11.

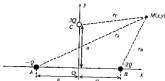


Fig. E11

1. Déterminer le potentiel électrostatique créé en un point  $M(x, y)$  situé dans le plan des charges.
2. En déduire le champ électrostatique créé par les trois charges au point  $M(x, y)$ .

**Solution :**

1. Choisissons l'origine des potentiels à l'infini. Les potentiels créés par les charges  $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  au point  $M$  sont respectivement :

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{AM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}},$$

$$V_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{BM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2Q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}};$$

$$V_3(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{r_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{CM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}},$$

où :  $r_1 = AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$  ;  $r_2 = BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$  ;  $r_3 = CM = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}$ .

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique créé par les trois charges ponctuelles au point  $M$ .

$$V(M) = \sum_i V_i(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} = V_1(M) + V_2(M) + V_3(M)$$

On obtient :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \right]$$

2. Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  dérive d'un potentiel, tel que

$$\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}$$

avec,

$$E_x(M) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x+a)}{\left[\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\right]^3} - \frac{2(x-a)}{\left[\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\right]^3} + \frac{2x}{\left[x^2 + (y-b)^2\right]^3} \right]$$

$$E_y(M) = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{y}{\left[\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\right]^3} - \frac{2y}{\left[\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\right]^3} - \frac{2(y-b)}{\left[x^2 + (y-b)^2\right]^3} \right]$$

⚡ Il est que ce calcul semble assez long, la bonne vérification que le calcul direct du champ électrostatique est plus difficile.

### Exercice 1.17 <sup>(\*\*\*)</sup> — Potentiel électrique créé par deux arcs de cercle concentriques chargés

Deux arcs identiques en forme d'arcs de cercle de rayons  $R_1$  et  $R_2$  sont respectivement chargés uniformément avec les densités linéiques de charges  $+\lambda$  et  $-\lambda$ . Ces arcs forment un angle total  $2\theta_0$  symétrique par rapport à l'axe des  $x$  (Fig. E12).

1. Déterminer le potentiel électrostatique  $V$  à l'origine  $O$ .

2. Étudier les cas suivants :

a.  $R_1 = \frac{\pi}{2}$  (demi-cercle)

b.  $R_1 = \pi$  (cercle entier)

3. Quel serait le potentiel électrostatique  $V$  à l'origine  $O$  si les distributions linéiques de charges sont :

a.  $\pm\lambda = \pm\lambda_0 \cos \theta$

b.  $\pm\lambda = \pm\lambda_0 \sin \theta$

4. Déterminer le potentiel électrostatique  $V$  en un point  $M$  situé sur l'axe  $Ox$ , distant de  $x$  de l'origine  $O$ , dans le cas où  $R_1 = \pi$  (cercle entier) et  $\lambda = \lambda_0$  ( $\lambda_0$  étant une constante positive).

Examiner le cas où le point  $M$  est très éloigné de  $O$ .



Fig. E12

**Solution :**

1. Le calcul du potentiel électrostatique créé par deux distributions de charges en cercle (2) s'obtient facilement en faisant la superposition des potentiels créés par :

- un arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $R_1$ , chargé avec la densité linéique  $+\lambda$
- un arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $R_2$ , chargé avec la densité linéique  $-\lambda$ .

Considérons l'arc de cercle comme  $Q$  = de rayon  $R_1$ , chargé avec la densité linéique  $+ \lambda$ . Ce arc sera traité par une densité linéique de charge. Un élément de arc a de longueur de charge de longueur  $d$  (Fig. E121).

Chaque élément de charge pour une corde de arc sera une charge ponctuelle de grandeur,  $d$  qui crée un  $Q$  en potentiel  $dV$  donné par :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{r_1}$$

$$\text{avec : } dq_1 = \lambda dl = \lambda R_1 d\theta$$



Fig. E121

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'écrit :

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} dV = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_1} dl$$

$$\text{Soit : } V = \frac{\lambda R_1}{2\pi\epsilon_0}$$

De la même façon, en montrant que l'arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $R_2$ , chargé avec la densité linéique  $-\lambda$ , crée au centre  $O$  un potentiel :

$$V' = -\frac{\lambda R_2}{2\pi\epsilon_0}$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total  $V$ , au point  $O$  :

$$V_{\text{tot}} = \sum V_i = V + V'$$

$$V_{\text{tot}} = \frac{\lambda R_1}{2\pi\epsilon_0} - \frac{\lambda R_2}{2\pi\epsilon_0} = 0$$

2. Examinons les cas suivants :

$$a) \quad R_1 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{dem.-cercle})$$

$$\text{On trouve : } V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} ; \quad V' = -\frac{\lambda}{4\epsilon_0} \quad \text{et } V_{\text{tot}} = 0.$$

a)  $d_1 = r$  (voir exercice)

On trouve :  $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ ;  $V' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$  et  $V_\infty = 0$ .

b) Filaments rectilignes infiniment longs

a)  $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique du fil 1 obtenu par intégration, s'écrit :

$$V = \int \frac{dV}{r} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [\sin \theta]_0^{2\pi}$$

Le potentiel créé en O par le fil 1 est donc :

$$V = \frac{\lambda_0 \sin \theta_1}{2\pi\epsilon_0}$$

De la même façon, on mesure que l'arc de cercle de rayon O et de rayon  $R_2$ , chargé avec la densité linéique  $-\lambda_0 \cos \theta$ , crée au centre O un potentiel :

$$V' = -\frac{\lambda_0 \sin \theta_2}{2\pi\epsilon_0}$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total V au point O :

$$V_1 = \sum V_i = V + V' = \boxed{V_1 = \frac{\lambda_0 \sin \theta_1}{2\pi\epsilon_0} - \frac{\lambda_0 \sin \theta_2}{2\pi\epsilon_0} = 0}$$

b)  $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'écrit :

$$V = \int \frac{dV}{r} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [-\cos \theta]_0^{2\pi}$$

Le potentiel créé en O par le fil 1 est donc :

$$V = 0$$

De la même façon, on mesure que l'arc de cercle de rayon O et de rayon  $R_2$ , chargé avec la densité linéique  $-\lambda_0 \sin \theta$ , crée au centre O un potentiel :

$$V' = 0$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total V, au point O :

$$V_1 = \sum V_i = V + V' = \boxed{V_1 = 0}$$

4. Considérons deux lignes infinies en forme de cercles de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , respectivement chargées uniformément avec les densités linéaires de charge  $+\lambda$  et  $-\lambda$ .

Considérons d'abord séparément les cas suivants : la charge positive  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  sur les cercles  $C_1$  de la même façon que précédemment, on divise le cercle en éléments de charge de longueur  $dl$  (Fig. E12.2).

Chaque élément de charge peut être considéré comme une charge ponctuelle de valeur  $\lambda dl$  qui crée en O un potentiel  $dV$  donné par :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R_1} \quad \text{avec} \quad dl = R_1 d\theta \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{dl}{R_1}$$

En appliquant le principe de superposition, si on prend l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique simultané obtenu par intégration, s'écrit :

$$V = \int_{\text{cercle}} dV = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

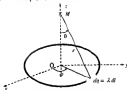


Fig. E12.2

Le potentiel créé en O par la ligne 1 est donc :

$$V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}}$$

De la même façon, on montre que le cercle de rayon  $R_2$  chargé avec la densité linéaire  $-\lambda_2$  crée au point M un potentiel :

$$V' = -\frac{\lambda_2}{2\epsilon_0} \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + z^2}}$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total  $V$  au point O :

$$V = \sum_i V_i = V + V' \quad \text{soit} \quad V = \frac{\lambda_1}{2\epsilon_0} \left[ \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right]$$

Si le point M est très éloigné du cercle ( $z \gg R_1$  et  $z \gg R_2$ ), l'expression du potentiel devient :

$$V = \pm \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R_1 - R_2}{z} \quad \left\{ \begin{array}{ll} + \lambda & : > 0 \\ - \lambda & : < 0 \end{array} \right.$$

### Exercice E13 Potentiel au centre d'une couche carrée chargée uniformément

Une couche carrée de centre  $O$  et de côté  $a$  porte une charge  $Q$  positive et porte uniformément la densité surfacique de charges  $\sigma$  (Fig. E13).

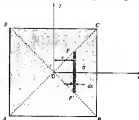


Fig. E13

1. Déterminer le potentiel créé par un segment de longueur  $2L$ , portant une charge  $Q$  uniformément répartie avec la densité linéique de charges  $\lambda$ , en un point  $M$  de la médiatrice, à une distance  $x$  du milieu de ce segment.
2. Déterminer la contribution au potentiel en  $O$  due à la bande étroite  $PP'$  de largeur  $dx$ .
3. Déterminer la contribution au potentiel en  $O$  due au quart du carré.
4. Déterminer le potentiel en  $C$  créé par la couche carrée chargée uniformément.

On prendra l'origine des potentiels à l'infini.

On donne :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} + Cte$$

**Solution :**

1. Calculons le potentiel électrostatique créé au point  $M$  par le segment chargé (Fig. E131). Pour cela, on divise le segment de longueur  $2L$  en éléments de longueur  $dx$  et de charge  $dx = \lambda dx$  (Fig. E131).

La charge élémentaire  $dq$  crée au point  $M$  un potentiel électrostatique élémentaire  $dV(M)$ , tel que :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

La distance  $r$  de la charge élémentaire  $dq$  au point  $M$  est  $r = \sqrt{x^2 + l^2}$ . L'expression du potentiel élémentaire  $dV(M)$  devient :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dl}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

En appliquant le principe de superposition, et en posant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'écrit :

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \int_{-L}^{+L} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

Finalement, on obtient l'expression de  $V$  sur  $Ox$  :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2 + L^2} + L}{x}$$

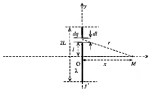


Fig. E13.1

2. La bande droite  $PP'$  peut être considérée comme un segment uniformément chargé à une densité linéique  $\lambda$  (Fig. E13.2). Ce segment porte une charge élémentaire :

$$dq = \lambda \cdot PP' = \lambda \cdot PP' \cdot dx$$

Soit :

$$\lambda = \sigma \cdot dx$$

Par conséquent, la contribution au potentiel en  $O$  due à la bande droite  $PP'$  de largeur  $dx$  s'écrit (on tient compte que  $x = L_0$ ) :

$$dV = \frac{\sigma \cdot dx}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \sqrt{2} + 1 \right)$$



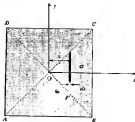


Fig. E13.2

3. La contribution au potentiel en  $O$  due au quart de cercle, c'est-à-dire du triangle  $BOC$ , s'écrit alors

$$V = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1) \left( x \right)_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

Soit : 
$$V = \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

4. Le potentiel en  $C$  créé par la feuille entire chargée uniformément est donc

$$V_{\text{feuille}} = \phi V = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

### Exercice 14 \*\* — Énergie potentielle électrostatique d'un système de charges quadratique

Aux quatre sommets d'un carré de centre  $O$  et de côté  $a\sqrt{2}$ , situé dans le plan  $xOy$ , sont fixés quatre ions positifs (Fig. E14). Chaque ion est assimilé à une charge ponctuelle  $+e$ .

1. Utiliser les symétries pour déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}$  au centre  $O(0,0,0)$  du carré. Quelle est son orientation au point  $M(0,0,z)$ ?

- Déterminer le potentiel électrique  $V$  au centre  $O$  du carré.
- Déterminer le potentiel électrique  $V$  en un point  $M$  de l'axe  $Oz$ .
- En déduire l'expression du champ électrostatique  $E$  au point  $M(0,0,z)$ .
- Un proton de charge  $+e$  est mobile le long de l'axe  $z'Oz$ . Exprimer la force  $F$  que subit le proton lorsqu'il se trouve au point  $M(0,0,z)$ .

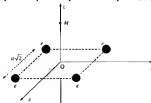


Fig. E14

- En déduire par deux méthodes différentes l'expression de l'énergie potentielle du proton lorsqu'il se trouve en un point quelconque  $M(0,0,z)$ .
- Ce proton aura-t-il une position d'équilibre? Si oui, cet équilibre est-il stable ou instable? Justifier votre réponse.
- Déterminer l'énergie potentielle électrostatique  $E_e$  du système formé par les quatre ions.
- En déduire par deux méthodes différentes l'énergie potentielle électrostatique  $E_e'$  d'un système composé de ces quatre ions et du proton lorsqu'il se trouve au centre  $O$  du carré.
- Tracer l'allure du graphe du potentiel  $V$  en fonction de  $z$ .
- Tracer l'allure du graphe de  $F_z$  en fonction de  $z$ .

**Solution :**

1. Les plans  $(xOz)$  et  $(yOz)$  sont des plans de symétrie; de même tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan de symétrie; le plan  $(xOy)$  est également un plan de symétrie.

Le point  $O$  appartient à des plans de symétrie orthogonaux; c'est un centre de symétrie. Le champ électrostatique  $E$  est nul au point  $O$ .

L'axe  $Oz$  appartient à des plans de symétrie orthogonaux (les plans  $(xOz)$  et  $(yOz)$ ); c'est un

un desquels est le champ électrostatique  $\vec{E}_M = E \vec{e}_x$  au point par l'axe Oz.

2. On suppose que le potentiel électrique est pour le potentiel électrostatique (Fig. E14)

$$V(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{x}$$

3. De la même façon, le potentiel électrostatique au point M, l'on a

$$V(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

Soit :

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

4. On remarque que  $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{x}$  pour  $z = 0$ .

4. Le champ électrique dérive d'un potentiel, tel que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . En considérant coordonnées, les composantes du gradient sont

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La relation  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  s'écrit  $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x$ , car  $V(M)$  ne dépend

que de  $x$   $\left( \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \right)$  on a  $E_x = E$ ,  $E_y = 0$ .

En utilisant l'expression du potentiel  $V(M)$  obtenue en (3), on trouve

$$\vec{E}_M = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

5. On vérifie bien que  $\vec{E}(0) = 0$  pour  $z = 0$ .

5. Au point M, le proton de charge  $+e$  est soumis à une force électrostatique

$$\vec{F}_M = +e \vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4e^2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

6.

a. Première méthode

La force électrostatique dérive de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ , telle que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$ . Par conséquent,

$$F = -\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_p \vec{u} \quad \text{soit} \quad d\mathcal{E}_p = -F dz$$

Par intégration, on obtient en prenant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini :

$$\int_a^z d\mathcal{E}_p = - \int_a^z F dz$$

$$\text{Calcul de l'intégrale } I = \int_a^z \frac{z dz}{(a^2 + z^2)}$$

$$\text{On pose } u = z^2, \text{ alors } du = 2 \cdot z dz \quad \text{et} \quad I = \int_a^z \frac{du}{2u} = \left[ \frac{\ln u}{2} \right]_a^z = \left[ \frac{\ln u}{2} \right]_a^z$$

$$\text{Donc} \quad I = -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{z^2}$$

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{E}_p(z) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

■ **Dernière méthode :**

L'énergie potentielle du proton se place au point M, s'écrit, par définition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^4 V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

7... Le dipôle sera une position d'équilibre si :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} = 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi^2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{soit} \quad z = 0$$

La position  $z = 0$  est stable si elle correspond à un minimum de l'énergie potentielle, instable, si elle correspond à un maximum de l'énergie potentielle.

Les minima de l'énergie potentielle sont caractérisés par une dérivée seconde positive.

Les maxima de l'énergie potentielle sont caractérisés par une dérivée seconde négative.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial z^2} < 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi^2 \left( \frac{(a^2 + z^2)^{-3/2} - \frac{3}{2} z^2 \cdot (a^2 + z^2)^{-5/2}}{(a^2 + z^2)^3} \right)$$

$$\text{Soit} : -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi^2 \cdot (a^2 + z^2) \left( \frac{a^2 + z^2 - 3z^2}{(a^2 + z^2)^3} \right) < 0$$

La position  $z = 0$  correspond donc à un équilibre instable du proton.

4. L'énergie potentielle  $E_p$  du système de quatre charges ponctuelles, situées

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \cdot V(M_i)$$

où  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sont les positions des quatre points de charge  $q_i$ ,

$$\text{et} \quad V(M_i) = \sum_{j=1}^3 \frac{q_j}{r_{ij}}$$

En raison de l'isométrie du système, on trouve

$$\begin{aligned} V(M_4) &= V(M_1) = V(M_2) = V(M_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \left( \frac{1}{r\sqrt{2}} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{r\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \left( \frac{1}{r\sqrt{2}} + \frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( r - a \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) r^2}{a} \end{aligned}$$

Finalement, l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  du système est donnée par

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i V(M_i) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) r^2}{a}$$

Soit,

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\left( 1 + 2\sqrt{2} \right) r^2}{a}$$

$$9. \quad V \text{ maximum} \Rightarrow \frac{dV}{dz} = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\text{Donc} \quad V_{\text{min}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q}{a}$$

$$\frac{dE_p}{dz} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q \cdot (z^2 - 2z^{-3})}{\left( z^2 + z^{-2} \right)^{3/2}} = 0 \Rightarrow z^2 - 2z^{-3} = 0 \Rightarrow \quad \underline{z_0 = a}$$

$$\text{Pour} \quad z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\sqrt{2}q}{a\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad E_z = \pm \frac{4q \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{4\pi\epsilon_0 \left( a^2 + \frac{a^2}{2} \right)^{3/2}} = \pm \frac{4q \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\frac{3a^2}{2}} \cdot \left( \frac{3a^2}{2} \right)}$$

Soit

$$E_z = \pm \frac{2q}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}$$

Les courbes représentatives des  $V(x)$  et de  $E_x(x)$  sont données respectivement par les fig. 14.1 et 14.2.

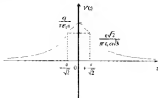


Fig. E14.1

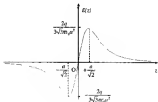


Fig. E14.2

# 4. Flux électrostatique

## Théorème de Gauss

**Exercice 15 :** — Flux électrostatique créé par une charge ponctuelle

1. On place une charge ponctuelle  $q$  au centre d'un cube d'arête  $a$ . Calculer le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers chaque face du cube.
2. Reprendre la même question pour la charge  $q$  placée à l'un des sommets du cube.
3. La charge  $q$  est maintenant placée au sommet d'un tétraèdre régulier. Calculer le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers chaque face du tétraèdre.

**Solution :**

1. Par définition, le flux élémentaire créé par une charge ponctuelle  $q$ , placée en  $O$ , à travers une surface fermée  $S$ , est donné par :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Lorsque la charge ponctuelle  $q$  est placée au centre  $O$  du cube, on voit depuis le point  $M$ , le cube (soit l'espace) sous un angle solide  $\Omega = 4\pi$ .

Par conséquent, depuis le point  $O$ , on voit chacune des faces sous un angle solide  $\Omega_f = \frac{4\pi}{6}$ . On en déduit l'expression du flux électrique à travers chaque face du cube :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

2. Lorsque la charge ponctuelle  $q$  est placée en l'un des sommets du cube, le tétraèdre ( $Oabc$ ) dans lequel se trouve le cube, est vu depuis ce sommet sous un angle solide  $\Omega = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ .

Numérotons les différentes faces pour faciliter l'écriture des expressions de flux :

- ① La face de gauche,
- ② La face de bas,
- ③ La face de droite,

- ④ La face de haut,
- ⑤ La face de bas,
- ⑥ La face de devant,



Fig. E15

On en déduit l'expression du flux électrique à travers les faces du cube (Fig. E15) :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{3} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

La répartition du flux  $\phi = \frac{q}{6\epsilon_0}$  effective de la façon suivante :

- Les faces ①, ② et ③ (les faces adjacentes au sommet ①) sont vues sous un angle solide réel. Elles sont donc traversées par un flux égal
- Les trois faces ④, ⑤ et ⑥ reçoivent le même flux  $\phi'$ , en raison de la symétrie

$$\phi' = \frac{\phi}{3} = \frac{q}{24\epsilon_0}$$

3. La charge  $q$  étant maintenant placée au sommet d'un tétraèdre régulier, le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers les faces du tétraèdre, adjacentes au sommet où se trouve la charge  $q$ , est égal.

Du sommet où se trouve la charge, on voit le tétraèdre sous un angle solide  $\Omega = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ .

La face en regard du sommet reçoit donc un flux électrostatique :  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{3}$

Soit

$$\phi = \frac{q}{12\epsilon_0}$$

4. Par définition, le flux électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$ , placée en  $O$ , à travers une surface fermée  $S$ , est donné par :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$



Lorsque la charge ponctuelle  $q$  est placée au centre  $O$  du cube, on voit depuis le point  $M$ , à l'angle droit l'arête, son contour solide  $\Omega = 4\pi$ .

En conséquence, depuis le point  $O$ , on voit chacune des faces sous un angle solide  $\Omega_1 = \frac{4\pi}{6}$ .

On en déduit les propriétés du flux électrique à travers chaque face du cube.

$$\phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6 \epsilon_0}$$

3. Lorsque la charge ponctuelle  $q$  est placée en l'un des sommets du cube, le tétraèdre  $(O, M, N, P)$  dans lequel se trouve le cube, on voit depuis ce sommet sous un angle solide  $\Omega = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit les propriétés du flux électrique à travers les faces du cube (Fig. E15):

$$\phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\pi}{2} = \frac{q}{8 \epsilon_0}$$

### Exercices 16. — Champ et potentiel électrostatiques créés par deux sphères concentriques chargées en surface

On considère deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  concentriques (Fig. E16.1), creuses et d'épaisseur négligeable, de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), et de charges totales respectives  $Q_1 = +Q$  et  $Q_2 = -Q$ . Ces charges sont distribuées uniformément sur les surfaces des sphères correspondantes.

1. Exprimer le champ électrique  $E(r)$  et le potentiel  $V(r)$  en tout point de l'espace.

2. On place une charge ponctuelle  $+Q$  au centre des deux sphères (Fig. E16.2). Exprimer le champ électrique total en tout point  $M$  de l'espace.

On suppose maintenant que les deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives  $-\sigma$  et  $+\sigma$  (Fig. E16.1).

3. Calculer l'intensité du champ électrique en tout point  $M$  de l'espace.

4. Tracer la courbe  $E(r)$  pour les trois cas et la courbe  $V(r)$  pour le premier cas seulement.



Fig. E16.1



Fig. E16.2

## Solution :

1.

## • Détermination du champ électrique

- Par symétrie, le champ électrique est radial

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

- Par symétrie (invariance par n'importe quelle rotation autour de  $O$ ), le champ électrique est indépendant des variables angulaires  $\theta$  et  $\varphi$

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{u}_r$$

En raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surfaces de Gauss des sphères de rayon  $r$  et de centre  $O$ . On détermine le champ électrostatique dans trois régions :

- $0 < r < R_1$

Choisissons une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_1$  de rayon  $0 < r < R_1$  (Fig. Etk.1).  $\Sigma_1$  ne contient pas de charges électriques, le champ électrique est nul. L'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$$



Fig. Etk.1

- $R_1 < r < R_2$

Choisissons maintenant une surface de Gauss  $\Sigma_2$  comprise entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_3$ , le champ électrique est perpendiculaire à  $\Sigma_2$  et son module est constant en tout point de  $\Sigma_2$ . La surface  $\Sigma_2$  contient une charge électrique totale  $-Q$ . L'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma_2} E \cdot d\vec{S} \cdot \vec{u}_r, \quad d\vec{S} = \vec{u}_r dS \Rightarrow \oint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_{\Sigma_2} dS = -\frac{Q}{\epsilon_0}.$$

On obtient :  $E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$ . Le champ électrique  $\vec{E}(r)$  est dirigé de  $\Sigma_2$  vers  $\Sigma_1$ .

- $r > R_2$

Choisissons cette fois-ci, une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_3$  de rayon  $r > R_2$ .  $\Sigma_3$  contient une charge électrique totale nulle, le champ électrique à l'extérieur de  $\Sigma_3$  est nul. L'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q + Q}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$$

• **Intégrabilité**

- Pour  $r < R_1$ ,  $\vec{E}(r) = \vec{0}$ .
- Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ .
- Pour  $r > R_2$ ,  $\vec{E}(r) = \vec{0}$ .

• **Détermination des potentiels électrostatiques**

- Pour  $r < R_1$

Le potentiel est obtenu par intégration:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow dV(r) = 0$$

On obtient  $V(r) = V_1$ , où  $V_1$  est une constante.

- Pour  $R_1 < r < R_2$

Le champ électrique dérive d'un potentiel  $\Rightarrow \vec{E}(r) = -\vec{\nabla}V(r)$

$$-\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \vec{E}(r) = dV(r) = -\vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

Par intégration, on obtient:  $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + V_2$ , où  $V_2$  est une constante à déterminer.

- Pour  $r > R_2$

Le champ électrique dérive d'un potentiel  $\Rightarrow \vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr}$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow dV(r) = 0$$

On obtient  $V(r) = V_3$ , où  $V_3$  est une constante à déterminer.

• **Détermination des constantes**

- Le potentiel est nul à l'infini (par convention).

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} (V_3) = 0 \Rightarrow \boxed{V_3 = 0}$$

- Le potentiel est continu en  $r = R_2$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} + V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2}}$$

- Le potentiel est continu en  $r = R_1$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_2} = V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

On a remarqué que  $V_1$  est le potentiel en 0 créé par les charges  $-Q$  et  $+Q$  aux distances  $R_2$  et  $R_1$  respectivement.

### • Récapitulatif

- Pour  $r < R_1$ ,  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$
- Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right)$
- Pour  $r > R_2$ ,  $V(r) = 0$

### 2

#### a. Détermination du champ électrique

En raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surface de Gauss des sphères de rayon  $r$  et de centre  $O$ . On détermine également le champ électrostatique dans ces régions :

- $0 < r < R_1$

Choisissons une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_1$  de rayon  $l$  ( $0 < l < R_1$ ) (Fig. E.16.1).  $\Sigma_1$  contient une charge électrique totale  $+Q$ , l'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} \cos \theta, \theta = \oint_{\Sigma_1} E \, dS = E S = +\frac{Q}{\epsilon_0}$$



Fig. E.16.2

On obtient :

$$\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r, \text{ le champ électrique diverge de la charge ponctuelle } +Q.$$

- $R_1 < r < R_2$

Choisissons maintenant une surface de Gauss  $\Sigma_2$  comprise entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_3$ .  $\Sigma_2$  contient une charge électrique totale nulle, l'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \vec{0}}$$

- $r > R_2$

Choisissons cette fois-ci, une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_3$  de rayon  $r > R_2$ .  $\Sigma_3$  contient une charge électrique totale égale à  $+Q$ , l'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma_3} E \, dS \cos \theta, \theta = \oint_{\Sigma_3} E \, dS = E S = +\frac{Q}{\epsilon_0},$$

Considérons  $\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$  le champ électrique  $\vec{E}(r)$  dirigé de la sphère de

#### • Résumé du II

- Pour  $r < R_1$ ,  $\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ ,
- Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $\vec{E}(r) = 0$ ,
- Pour  $r > R_2$ ,  $\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ .

1.

#### • Détermination du champ électrique

En raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surfaces de Gauss des sphères de rayon  $r$  et de centre  $O$ . On détermine ainsi le champ électrostatique dans trois régions.

- $0 < r < R_1$

$$\oint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = 0$$

- $R_1 < r < R_2$

$$\oint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = \oint_{\vec{S}} E \, dS = E \oint_{\vec{S}} dS = -\frac{Q}{\epsilon_0} = -\frac{4\pi R_1^2 \sigma}{\epsilon_0}.$$

On obtient  $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r = \boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r}$ . Le champ  $\vec{E}(r)$  est dirigé de  $S_2$  vers  $S_1$ .

- $r > R_2$

$$\oint_{\vec{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q_2 + Q_1}{\epsilon_0} = \frac{4\pi(R_2^2 - R_1^2)\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r^2} \vec{e}_r}.$$

#### • Bilan final

- Pour  $r < R_1$ ,  $\vec{E}(r) = 0$ ,
- Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_r$ ,
- Pour  $r > R_2$ ,  $\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r^2} \vec{e}_r$ .

#### • Détermination du potentiel électrostatique

- Pour  $r < R_1$

Le potentiel est obtenu par intégration

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow V(r) = 0$$

On obtient  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_V$ , où  $V$  est une constante.

- Pour  $R_1 < r < R_2$

Le champ électrique dérive d'un potentiel  $\Rightarrow \vec{E}(r) = -\nabla V(r)$

$$-\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \vec{E}(r) \Rightarrow dV(r) = -\vec{E}(r) \cdot \vec{dr} = -\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr$$

Par intégration, on obtient  $V(r) = -\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} + V_0$ , où  $V_0$  est une constante à déterminer.

- Pour  $r > R_2$

Le champ électrique dérive d'un potentiel  $\Rightarrow \vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr}$

$$-\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \vec{E}(r) \Rightarrow dV(r) = -\vec{E}(r) \cdot \vec{dr} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr$$

On obtient  $V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r} + V_1$ , où  $V_1$  est une constante à déterminer.

- Détermination des constantes:

- Le potentiel est nul à l'infini (par convention):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} (V_1) = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

- Le potentiel est continu en  $r = R_2$ :

$$-\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 R_2} + V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{R_2} \Rightarrow V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R_1$$

- Le potentiel est continu en  $r = R_1$ :

$$-\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 R_1} + V_3 = V_2 \Rightarrow -\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} = V_2 \Rightarrow V_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (R_2 - R_1)$$

- Récapitulatif

- Pour  $r < R_1$ ,  $V_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (R_2 - R_1)$ ,
- Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $V(r) = -\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} R_2$ ,
- Pour  $r > R_2$ ,  $V(r) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r}$

4. Les tracés de  $E(r)$  pour les cas (1), (2) et (3) sont représentés par les figures E15.1, E15.2 et E15.3. Le tracé de  $V(r)$  pour le cas (1) est représenté par la figure P15.5.



Fig. E16.3



Fig. E16.4

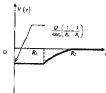


Fig. E16.5



Fig. E16.6

### Problème 17<sup>\*\*\*</sup> — Plan chargé et principe de superposition

Une densité surfacique de charges  $\sigma$  est uniformément répartie sur une mince feuille plane d'aluminium, de surface infinie (Fig. E17).

1. Étudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges.
2. Déterminer le champ électrostatique créé par ce plan infini.
3. On pratique une ouverture circulaire, de rayon  $R$ , sur la feuille d'aluminium. Déterminer le champ électrostatique créé en un point  $M$  de l'axe du trou, dépourvu de charges (Fig. E17).



Fig. E17

**Solution :**

1. *Observation et analyse des symétries*

Tout plan perpendiculaire à la surface chargée (plan  $P$ ) est un plan de symétrie (Fig. E17.1). Par conséquent, le champ électrique  $\vec{E}$  appartient à ce plan de symétrie en tout point de celui-ci. Donc, en tout point de l'espace,  $\vec{E}$  est perpendiculaire à la surface chargée (plan  $\Omega$ ).

$\vec{E} = E \vec{e}$ , où  $\vec{e}$  est un verseur unitaire normal au plan  $\Omega$ .

En outre, le plan  $P$  est également un plan de symétrie. Donc, en deux points symétriques par rapport au plan  $P$ , les vecteurs champ électrique sont égaux et opposés :  $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$ .

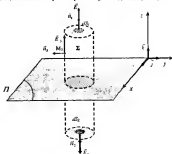


Fig. E17.1



sur  $\mathcal{A}$  l'axe, la densité de charge est l'écarté par unité de surface du fil  $\dots$ . Donc le champ électrostatique ne dépend que de  $x$  et s'écrit  $\vec{E}(x, y, z) = E(x)\vec{e}_x$ .

La densité de charge est également l'écarté par translation le long de l'axe des  $x$ , donc le champ électrostatique ne dépend pas de  $x$ .

En définitive, en tout point de l'espace  $\mathcal{E}(x, y, z)$  le champ électrostatique ne dépend pas du coordonnées du point  $\mathcal{E}(x, y, z) = \vec{E}$ .

En conséquence, tous les points du demi-espace au dessus (ou au dessous) du plan  $\mathcal{P}$  ont écartés le champ électrostatique  $\vec{E}$  est donc uniforme. Ainsi, en point  $M_1$ , le champ électrostatique est égal à  $\vec{E}_1$  (fig. E37-3).  $\mathcal{E}(M_1) = \mathcal{E}(M_2) = \vec{E}_1$ ,  $M_1$  étant un point appartenant à la surface  $\mathcal{S}_1$ .

## 2. Choix de la surface de Gauss

On prend comme surface de Gauss, une boîte cylindrique, perpendiculaire à la surface chargée (plan  $\mathcal{P}$ ), et limitée par deux sections droites  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  symétriques par rapport à  $\mathcal{P}$ . Elle débouche sur le plan en éléments de surface  $d\mathcal{S}_1$  tel que  $d\mathcal{S}_1 = d\mathcal{S}_2$ .

Le flux électrostatique sortant de  $d\mathcal{S}_1$  est :

$$d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{d\mathcal{S}_1} = E \, d\mathcal{S} \, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = E \, d\mathcal{S},$$

où :  $\vec{E}_1 = E \, \vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_1$  étant un vecteur unitaire de la base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $d\mathcal{S}_1 = d\mathcal{S} \, \vec{e}_1$ .

Le produit scalaire  $\vec{E} \cdot \vec{e}_1$  étant égal à un ( $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_1$  sont colinéaires).

De la même façon, on obtient le flux électrostatique sortant de  $d\mathcal{S}_2$  :

$$d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{d\mathcal{S}_2} = -E \, d\mathcal{S} \, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -E \, d\mathcal{S},$$

où :  $\vec{E}_2 = -E \, \vec{e}_2$  et  $d\mathcal{S}_2 = d\mathcal{S} \, \vec{e}_2$ .

Le produit scalaire  $\vec{E} \cdot \vec{e}_2$  étant égal à moins un ( $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_2$  sont opposés).

Le flux sortant de la surface latérale est nul, car en tout point, le champ électrostatique est parallèle à cette surface. En effet, en tout point  $M_3$  appartenant à la surface latérale, le produit scalaire  $\vec{E}_3 \cdot \overrightarrow{d\mathcal{S}_3}$  est constamment nul, car  $\vec{E}(M_3) = \vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_3$ .

En définitive, le flux total sortant de la surface  $\mathcal{L}$  se réduit à celui sortant des surfaces terminales  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  :

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 2E \, d\mathcal{S}$$

## 4. Application du théorème de Gauss

L'élément de surface  $d\mathcal{S}$  découpé dans la surface électrisée porte la charge  $dq = \sigma \, d\mathcal{S}$ .

D'après le théorème de Gauss, le flux électrostatique sortant de la surface  $\mathcal{L}$  est :

$$d\phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \, d\mathcal{S}}{\epsilon_0}$$

En comparant les deux équations précédentes, on trouve :

$$d\phi = \frac{\sigma \, d\mathcal{S}}{\epsilon_0} = 2E \, d\mathcal{S}$$

On trouve finalement :

$$\boxed{E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Pour un dipôle :

$\vec{E}_{\text{dip}} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}$	$\begin{cases} + & \text{si} & z > 0 \\ - & \text{si} & z < 0 \end{cases}$
---	--

3. Ces contributions de charges s'obtiennent par superposition de deux distributions de charges suivantes (Fig. E17.2) :

- un plan infini portant une densité surfacique de charge électrique positive  $+\sigma$  ;
- un disque chargé  $R$  portant une densité volumique de charge uniforme  $+\sigma$  (pour  $z > 0$ ).

La synthèse des distributions de charge implique la synthèse des champs électrostatiques. Les lois de l'électrostatique étant linéaires, on peut appliquer le principe de superposition :

Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$ , créé par cette distribution en un point  $M$  quelconque, est obtenu en faisant la somme vectorielle des champs  $\vec{E}_{\text{pl}}(M)$  et  $\vec{E}_{\text{dis}}(M)$  créés séparément, respectivement par le plan infini et le disque  $D$  :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{pl}}(M) + \vec{E}_{\text{dis}}(M)$$

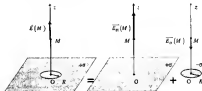


Fig. E17.2

Les champs électrostatiques  $\vec{E}_{\text{pl}}(M)$  et  $\vec{E}_{\text{dis}}(M)$  créés, respectivement par le plan infini et le disque  $D$ , ont été calculés précédemment. Le résultat obtenu s'écrit :

- pour le plan infini :

$$\vec{E}_{\text{pl}} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e} \quad \begin{cases} + & \text{si} & z > 0 \\ - & \text{si} & z < 0 \end{cases}$$

- pour le disque  $D$  :

$$\vec{E}_{\text{dis}} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \left( \pm 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{e} \quad \begin{cases} + & \text{si} & z > 0 \\ - & \text{si} & z < 0 \end{cases}$$

Pour le plan infini d'une ouverture, on donne :

# 5. Dipôle électrostatique

## Exercice 18 Mouvement oscillatoire d'un dipôle dans le champ d'un anneau chargé

On considère un anneau métallique de centre  $O$  et de rayon  $R$  portant une charge  $Q$  répartie uniformément avec la densité linéique  $\lambda$  (Fig. E18).

1. Déterminer le potentiel électrostatique en un point  $M$  de l'axe  $Oz$ .
2. En déduire le champ électrostatique au point  $M$ .
3. Tracer l'allure de  $V(z)$  et  $E(z)$ .

On place au point  $M(0,0,z)$  un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = qd \vec{e}$  et de masse  $m$ , qui se déplace le long de l'axe  $Oz$ . Ce dipôle est constitué de deux charges  $(-q, +q)$ , dont le centre est en  $M$  et dont la distance  $d$  est faible devant la distance  $z$ .

4. Quelles sont les forces qui sont appliquées au dipôle?
5. Déterminer les positions d'équilibre du dipôle et quelle serait la nature de cet équilibre?

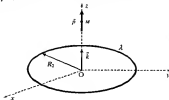


Fig. E18

6. Soit  $z_0$  la position d'équilibre stable du dipôle. À l'instant  $t = 0$ , on laisse cet dipôle à l'origine sans vitesse initiale et on a  $0 < z_0 < z_0'$ . Déterminer la position des oscillations qui en résultent.

Solution :

1. On calcule d'abord dans l'exercice 11, la constante  $k$  qui est

$$V_e(z) = \frac{kR}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

2. Le champ électrostatique dérive d'un potentiel, tel que :  $\vec{E} = -\nabla V$ . Le long de l'axe Oz, le potentiel est une fonction de  $z$  seulement. Par conséquent :

$$\vec{E} = E(z) \vec{e} = -\frac{dV}{dz} \vec{e}$$

$$\vec{E} = \frac{kR}{2\epsilon_0 \left( z^2 + R^2 \right)^{3/2}} z \vec{e}$$

3. Les graphes de  $V_e(z)$  et  $E(z)$  sont représentés sur la figure E18.1.

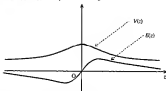


Fig. E18.1

4. La dipôle est placé dans le champ électrique  $\vec{E}$  créé par l'anneau chargé. Le champ  $\vec{E}$  n'étant pas uniforme, son action se traduit par :

— un couple de moments :

$$|\vec{L}| = |\vec{p} \wedge \vec{E}| = pE \sin \theta = 0 \quad (\vec{p} \text{ et } \vec{E} \text{ sont colinéaires}) ;$$

— une force résultante :

$$\vec{F} = q\vec{E}(z+d) - q\vec{E}(z) = q \left[ E(z+d) - E(z) \right] \vec{e} = qd \frac{dE}{dz} \vec{e}$$

$$\text{soit} \quad \vec{F} = \frac{kR}{2\epsilon_0} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} z \vec{e} \quad \text{si} \quad d \ll z.$$

On a bien en : 
$$f = \exp\left(\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - R'^2 - 2x^2}{(x^2 + R^2)^2}\right) x$$

■ En général, on utilise l'expression :

$$F^x = -\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E}_p = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int \rho \cdot E \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int \rho \cdot E \right) = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$$

3. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force résultante soit nulle

$$F^x = q \left( \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - R'^2 - 2x^2}{(x^2 + R^2)^2} \right) x = 0 \Rightarrow R'^2 - 2x^2 = 0$$

D'où : 
$$x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Il y a donc deux positions d'équilibre :  $x_0 = +\frac{R}{\sqrt{2}}$  et  $x_1 = -\frac{R}{\sqrt{2}}$

→ La position d'équilibre stable correspond à  $x_1 = -\frac{R}{\sqrt{2}}$

•  $F^x = 0$  et  $F^y = E$  sont colinéaires et de même sens;

•  $\mathcal{E}_p(x_1) = -\rho \cdot E(x_1) = -\rho \cdot E(x_1)$  (l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x_1)$  du dipôle est minimale)

→ La position d'équilibre instable correspond à  $x_0 = +\frac{R}{\sqrt{2}}$

•  $F^x = 0$  ;  $F^y = E$  sont colinéaires mais de sens contraires;

•  $\mathcal{E}_p(x_0) = -\rho \cdot E(x_0) = +\rho \cdot E(x_0)$  (l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x_0)$  du dipôle est maximale)

5. On applique la relation fondamentale de la dynamique au dipôle en mouvement. Le poids du dipôle est négligeable devant la force électrostatique  $F(x, \delta x)$ .

On obtient alors :

$$F(x, \delta x) = m \frac{d^2(x + \delta x)}{dt^2} = m \frac{d^2x}{dt^2} + m \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = m \frac{d^2(\delta x)}{dt^2}$$

La force électrostatique s'exprime, d'après (4), avec  $x_0 = +\frac{R}{\sqrt{2}}$  :

$$F = q \left( \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - R'^2 - 2(x_0 + \delta x)^2}{(x_0^2 + R^2)^2} \right) x = q \left( \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - 2 \left( \frac{R}{\sqrt{2}} + \delta x \right)^2}{\left( \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + R^2 \right)^2} \right) x = q \left( \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^2 - 2 \left( \frac{R}{\sqrt{2}} + \delta x \right)^2}{\left[ \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{R} \delta x \right)^2 + R^2 \right]} \right) x$$

donc

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= qd \frac{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{R}{f_0} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{dt} k_0 \right)}{\left[ \left( \frac{R}{f_0} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{dt} k_0 \right) + k^2 \right]} \vec{R} = qd \frac{\frac{dR}{dt} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} k \frac{d}{dt} k}{\left( \frac{R}{2} \right)^2} \vec{k} \\
 &= qd \frac{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{2 \sqrt{3} R}{\left( \frac{R}{2} \right)^2} \Delta_0}{\left( \frac{R}{2} \right)^2} \vec{R} = -qd \frac{1}{k_0 + \sqrt{3} R} \frac{d}{dt} k
 \end{aligned}$$

La dérivée dans l'équation écrite dans (3)  $\langle k \rangle \propto \frac{1}{k_0}$ , l'équation cherchée devient alors

$$m \frac{d^2 \langle \Delta_0 \rangle}{dt^2} = -qd \frac{1}{k_0 + \sqrt{3} R} \langle \Delta_0 \rangle$$

Finalement, on a

$$\frac{d^2 \langle \Delta_0 \rangle}{dt^2} + qd \frac{1}{k_0 + \sqrt{3} R} \langle \Delta_0 \rangle = 0$$

C'est l'équation caractéristique d'un mouvement oscillatoire de pulsation  $\omega$  et de période

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Cette équation est de la forme

$$\frac{d^2 \langle \Delta_0 \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle \Delta_0 \rangle = 0$$

Où

$$\omega = \frac{2}{3R} \sqrt{\frac{3q d k}{\epsilon_0 m}}$$

Donc, la période  $T$  est donnée par

$$T = 3\pi R \sqrt{\frac{\sqrt{3} \epsilon_0 m}{2q d k}}$$

On peut exprimer la période en fonction du moment dipolaire  $p$  et de la charge totale  $Q$  de l'anneau ( $p = q d$  et  $Q = 2\pi R \lambda$ ). On obtient

$$T = 3\pi R \sqrt{\frac{\sqrt{3} \epsilon_0 m}{p Q}}$$

#### III Vérification de la formule

On vérifie l'équation aux dimensions

$$[T] = [3\pi R] \sqrt{\frac{[\sqrt{3} \epsilon_0] [m]}{[p] [Q]}}$$

Il s'écrit :

$$[E] = IT^{-1}, [E_0] = M^{-1} \cdot L^1 \cdot T^{-1} [Q] = L^{-2}, M^{-1} \cdot L^1 \cdot T^{-1} \cdot L^{-1}$$

On obtient :

$$T = L^2 \cdot \left( M^{-1} \cdot L^1 \cdot T^{-1} \cdot L^1 \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = (M)^{\frac{1}{2}} \cdot (L/T)^{-\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot T^{-\frac{1}{2}} = T$$

Conséquence : l'énergie est en joules. Elle est donc satisfaisante.

### Exercice 19 : Stabilité d'un dipôle dans le champ d'un fil rectiligne infini uniformément chargé.

1. Soit un filament rectiligne infiniment long, portant une charge  $\lambda$  par unité de longueur (Fig. E19). En effectuant un calcul direct, montrer que le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point  $M$  est donné par :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

2. On place un dipôle au point  $M$ , distant de  $r$  du fil, et son moment dipolaire  $\vec{p}$  fait un angle  $\alpha$  avec la direction du fil (Fig. E19).

2.1. Calculer la force exercée sur le dipôle.

2.2. Calculer le moment du couple agissant sur le dipôle.

3. Calculer l'énergie potentielle électrostatique du dipôle en interaction avec le champ créé par le fil chargé.

4. Déterminer les positions stables du dipôle lorsqu'il est maintenu à une distance fixe.

5. Après avoir pris l'orientation  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , le dipôle se déplace de la distance  $r$  à  $\frac{r}{2}$ . Calculer la variation de l'énergie cinétique du dipôle.

**Solution :**

1. En utilisant les résultats de l'exercice 7, on obtient :

$$E(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

2. Le dipôle est placé dans un champ électrique non uniforme (il ressentira proportionné à  $r$ ) il est soumis à une force électrostatique donnée par :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) E(M)$$

En coordonnées cylindriques, l'expression de la force  $\vec{F}$  s'écrit :

$$\vec{r} = \left( (p, \vec{u}_1 + p, \vec{u}_2 + p, \vec{u}_3) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{u}_3 \right) \right) E(r) \vec{u}_1.$$

Soit :  $\vec{r} = \left( p, \frac{\partial}{\partial r} \right) r E(r) \vec{u}_1$

En remplaçant le champ  $\vec{E}(r)$  par son expression, on obtient :

$$\vec{r} = \left( p, \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{k}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_1 = -\frac{p}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_1 \vec{u}_1.$$

Comme le dipôle a le flux des charges nulles, on a :

$$\vec{p} = p, \vec{u}_1 + p, \vec{u}_2,$$

avec  $p_x = p \sin \alpha$  et  $p_z = p \cos \alpha$

On obtient finalement :

$$\boxed{\vec{r} = -\frac{p k}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha \vec{u}_2}$$

3. Le moment  $\vec{L}$  du couple appliqué au dipôle est donné par :

$$\vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{L} = (p, \vec{u}_1 + p, \vec{u}_2) \wedge E(r) \vec{u}_1.$$

Soit :  $\vec{L} = p, E(r) \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_1 + p, E(r) \vec{u}_2$

Puisque :

$$\boxed{\vec{L} = \frac{p k}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha \vec{u}_2}$$

= L'énergie potentielle du dipôle est donnée par :

$$E_p(M) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M) = -(p, \vec{u}_1 + p, \vec{u}_2) \cdot E(r) \vec{u}_1 = -p, E(r)$$

Soit :  $E_p(M) = E_p(r, \alpha) = -\frac{p k}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha$

$$\boxed{E_p(r, \alpha) = -p E(r) \cos \alpha}$$

4. Puisque le dipôle est maintenu à une distance  $r$  fixe, alors l'énergie potentielle du dipôle que de la variable  $\alpha$ .

Les deux positions d'équilibre du dipôle correspondent aux extrema de l'énergie potentielle, c'est-à-dire à :

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$



- La position d'équilibre instable correspond à  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$

- l'énergie potentielle est nulle,

$$\left( \text{on a} \left[ \frac{d^2 U}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = p E \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = p E < 0 \right)$$

- La position d'équilibre instable correspond à  $\alpha_0 = \frac{3\pi}{2}$

- l'énergie potentielle est nulle,

$$\left( \text{on a} \left[ \frac{d^2 U}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=\frac{3\pi}{2}} = p E \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -p E < 0 \right)$$

- La variation de l'énergie cinétique du dipôle est égale au travail de la force électrostatique

$$\Delta E_c = E_{\text{cin}} - E_{\text{cin},0} = W = \int_0^{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Delta E_c = \int_0^{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{\alpha} -\frac{p \lambda}{2\pi \epsilon_0 r^2} \sin \alpha \vec{e}_r \cdot d\vec{\sigma}$$

Soit :

$$= -\frac{p \lambda}{2\pi \epsilon_0} \sin \alpha \int_0^{\alpha} \frac{d\sigma}{r^2} = -\frac{p \lambda}{2\pi \epsilon_0} \sin \alpha \left[ -\frac{1}{r} \right]_0^{\alpha} = \frac{p \lambda}{2\pi \epsilon_0} \sin \alpha \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right]$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{p \lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \sin \alpha}$$

### Exercice 20 : Force exercée sur un dipôle placé dans un champ électrique non uniforme

On considère un dipôle électrostatique, formé de deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$ , séparées par une distance  $a$ . On place ce dipôle à une distance  $r \gg a$  d'une charge ponctuelle  $Q$ . Le dipôle est aligné avec le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par  $Q$ .

Déterminer la résultante des forces électrostatiques exercées sur le dipôle.

**Solution :**

- La force exercée sur le dipôle est (Vg, 120) :

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}+a) - q\vec{E}(\vec{r})$$

On a  $\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}$ ,

$\vec{r}$  est le vecteur position relatif calculé par rapport à  $Q$ , il vaut en  $\frac{1}{r}$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{r} &= q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{x^2} \right) \vec{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x^3} \left( \frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} - 1 \right) \vec{x} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x^3} \left[ \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^{-2} - 1 \right] \vec{x} \end{aligned}$$

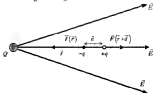


Fig. E20

Utilisons le développement en série :

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Pour  $n = -2$ , ce développement donne

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

En négligeant les termes d'ordre 3 et plus, on trouve :

$$\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x^3} \left[ \left( 1 - 2\frac{a}{x} \right) - 1 \right] \vec{x}$$

soit :

$$\boxed{\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQa}{x^3} \vec{x}}$$

La force  $\vec{F}$  peut s'exprimer en fonction du moment dipolaire  $\vec{p} = qa \vec{x}$  :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{x^3} \vec{p} = \vec{F}_x}$$

# 6. Conducteurs en équilibre

## Exercice 21. — Liaison de deux conducteurs

Un double pendule est constitué par deux boules sphériques  $s$  conductrices de même  $m$ , suspendues par deux fils conducteurs dont la longueur  $l$  est grande devant le rayon  $r$  des sphères. Les deux boules étant initialement neutres, on les relie, par l'intermédiaire d'un fil conducteur, très long et de capacité négligeable, avec une sphère conductrice  $S$ , de rayon  $R$ , initialement chargée. À l'équilibre mécanique, l'angle des deux pendules est  $2\alpha$ .

1. Exprimer, à l'équilibre du double pendule, la charge  $Q$  de la sphère  $S$  en fonction de l'angle  $\alpha$  (Fig. E21).

2. On supprime le fil de jonction et on suppose que l'influence mutuelle, entre les sphères conductrices  $S$  et  $s$ , est négligeable. Déterminer le potentiel des deux pendules à l'équilibre.

Application numérique :  $l = 12 \text{ cm}$ ,  $R = 60 \text{ cm}$ ,  $r = 6 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 10^\circ$ .

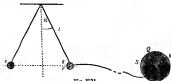


Fig. E21

**Solution :**

1. La sphère  $S$  porte initialement une charge  $Q_0$ . Les deux boules sphériques  $s$  sont initialement neutres. Après connexion, chaque boule  $s$  possède une charge  $q$ , et le sque

$$2q + q = 0 + Q_2 = Q_0 \quad \text{d'après le principe de conservation de la charge}$$

Les sphères  $a$  et  $b$  sont suffisamment éloignées pour se voir faiblement et réciproquement, la répartition de charge sur chacune d'elles est uniforme.

A l'équilibre électrostatique, les deux boules sphériques  $a$  et  $b$  se comportent en  $C$  ou sont à un angle  $2\alpha$ . Par ailleurs, les sphères  $a$  et  $b$  forment, après connexion, un conducteur unique, de potentiel  $V$  :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Les potentiels des deux sphères du système

$$V_1 = V_2 = V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$\text{On déduit : } \frac{q}{r} = \frac{Q}{R} = \frac{2q + Q}{2r + R} = \frac{Q_0}{2r + R}$$

Par conséquent,

$$q = Q_0 \frac{r}{2r + R} = Q_0 \frac{r}{R} \quad \text{et} \quad Q = Q_0 \frac{R}{2r + R} = Q_0$$

$$\text{Il en découle : } \boxed{q = Q \frac{r}{R}}$$

Chaque sphère  $a$ , portant la charge  $q$ , est alors soumise à l'action de trois forces (Fig. E2.1.1) :

- le poids  $\vec{P}$ , vertical et dirigé vers le bas;
- la force électrostatique  $\vec{F}_e$ , horizontale et répulsive;
- la tension du fil  $\vec{T}$ , dirigé le long du fil.

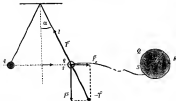


Fig. E2.1.1

4. Les forces électrostatiques, la résultante de ces forces est nulle :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}' = \vec{0} \Rightarrow 0$$

Par conséquent, l'équilibre électrostatique du pendule s'écrit :

$$\tan \theta = \frac{P}{P'}$$

Les forces  $P' = P' \sin \theta$

Or, l'expression de la force électrostatique est :  $P' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \alpha)^2}$

Par conséquent,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \alpha)^2} = m g \sin \alpha$

Finalement, on obtient :

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 m g \sin \alpha \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)}$$

On en déduit la charge  $Q$  de la sphère :  $Q = q \frac{R}{r}$

Application numérique :  $l = 12 \text{ cm}$ ;  $R = 60 \text{ cm}$ ;  $r = 6 \text{ mm}$ ;  $m = 0,3 \text{ g}$ ;  $\alpha = 10^\circ$

$$q = \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 9,8 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^2 \left( \frac{3,25 \cdot 10^{-4}}{0,985} \right)} = 10^{-8} \text{ [C]} \Rightarrow \boxed{Q = 10^{-8} \text{ [nC]}}$$

$$\text{et } Q = 10^{-8} \cdot \frac{60 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-3}} = 10^{-6} \text{ [C]} \Rightarrow \boxed{Q = 1 \text{ [}\mu\text{C]}}$$

2. On déconnecte le fil de jonction. Les deux pendules sont identiques. Ils portent la même charge  $q$  et sont donc au même potentiel  $V$ .

Par application du principe de superposition, on exprime le potentiel au centre de l'un des pendules :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(2l \sin \alpha + 2r)}$$

Sachant que  $r \ll l$  donc, on obtient :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2l \sin \alpha} \right)$$

Application numérique :  $l = 12 \text{ cm}$ ;  $R = 60 \text{ cm}$ ;  $r = 6 \text{ mm}$ ;  $m = 0,3 \text{ g}$ ;  $\alpha = 10^\circ$

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot \left( \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-2} \sin(10^\circ)} \right) \Rightarrow \boxed{V = 17 \cdot 100 \text{ [V]}}$$



Un câble coaxial, rempli d'air, de longueur  $h$  est formé par :

- un fil métallique de rayon  $R_1$  portateur d'une charge positive  $+q$ ;
- une couche isolante d'air de rayon intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ ;
- un cylindre métallique creux, de rayon  $R_2$ , coaxial au fil (Fig. E22).

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique  $E(r)$  et le potentiel  $V(r)$  dans l'isolant à la distance  $r$  du l'axe.

2. En déduire la capacité par unité de longueur du câble.

3. Calculer la différence de potentiel entre le fil et cylindre pour laquelle il apparaît une élévation disruptive dans l'air.

*Application numérique:*  $R_1 = 1 \text{ mm}$ ;  $R_2 = 1 \text{ cm}$ ;  $E_{\text{max}} = 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$  (le champ électrique disruptive).



Fig. E22

**Solution :**

1. La distribution de charges possède une symétrie cylindrique. On choisit une surface de Gauss cylindrique fermée  $S$ , de même axe que le câble coaxial, de longueur  $h$  et de rayon  $r$ , ( $R_1 < r < R_2$ )

D'après le théorème de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{q}{r} \quad E_r$$

Donnons la formule de charge par unité de fil infini long.

Layons nous en directement par intégration :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{1}{r} \Rightarrow dV(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{dr}{r}.$$

On obtient  $V(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln r + C$ , où  $C$  est une constante.

Si  $V_1$  est le potentiel du fil infini long, alors on a :

$$V(r) = V_1 - \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{r}{R_1}$$

2. Pour déterminer la différence de potentiel entre le fil et le cylindre, faisons circuler le champ sur  $r = R_1$  ou  $r = R_2$  le long d'une ligne de champ.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int_{R_1}^{R_2} dV = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_1 - V_2 = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \left( \vec{e}_r \cdot d\vec{r} \right) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} = -\frac{q}{C}$$

D'où la capacité :

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

On en déduit la capacité par unité de longueur du câble :

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

3. Le champ électrique est maximal pour  $r = r_{\max} = R_1$ . Son expression est :

$$E_{\max} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{q}{R_1} \quad \Rightarrow \quad E_{\max} R_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h}$$

Dans ces conditions, la valeur maximale de la d.d.p. est :

$$(V_1 - V_2)_{\max} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{Soit } (V_1 - V_2)_{\max} = E_{\max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Application numérique :  $R_1 = 1 \text{ mm}$  ;  $R_2 = 1 \text{ cm}$  ;  $E_{\max} = 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$ .

$$(V_1 - V_2)_{\max} = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad (V_1 - V_2)_{\max} = 491 \text{ [kV]}$$

### Exercice 12377 — Potentiel d'une couronne sphérique concentrique

1. Une sphère conductrice pleine  $A$ , de rayon  $R_1 = 9$  cm, est seule dans l'espace et portée au potentiel  $V_1 = +400$  V. Que lui est sa charge  $Q_1$ ?

2. L'ayant isolée de la source, on introduit la sphère  $A$  par une autre sphère conductrice creuse  $B$ , concentrique, de rayon intérieur  $R_2 = 11$  cm et  $R_3 = 12$  cm, initialement neutre et isolée.

2.a. Calculer les charges portées par les sphères  $A$  et  $B$ .

2.b. Calculer les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  des deux sphères.

2.c. Calculer la capacité du condensateur sphérique  $AB$ .

2.d. On relie les deux sphères conductrices à l'aide d'un fil métallique. Que deviennent les charges et les potentiels des deux sphères?

3. On considère deux sphères  $A$  et  $B$  identiques aux précédentes: la sphère  $A$  étant toujours isolée, on réunit  $B$  à un générateur qui la porte à un potentiel  $V_2 = 5400$  V.

3.a. Calculer les charges  $Q'_A$  et  $Q'_B$  des deux sphères conductrices.

3.b. Calculer le potentiel  $V'_A$  de la sphère  $A$ ?

4. La sphère  $A$  est maintenant reliée au sol et on coupe  $B$  du générateur.

4.a. Calculer les charges  $Q''_A$  et  $Q''_B$  des deux sphères conductrices.

4.b. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(r)$  en tout point  $M$  de l'espace, tel que  $\overline{OM} = r$ .

4.c. Calculer le potentiel  $V''_B$  de la sphère  $B$ .

**Solution :**

1. La potentiel  $V_1$  de la sphère conductrice  $A$  est :  $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} Q_1$

On en déduit la charge  $Q_1$  portée par la sphère conductrice  $A$  :  $Q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1$

Application numérique:  $R_1 = 9.10^{-2}$  m;  $V_1 = 400$  V.

$$Q_1 = \frac{1}{9.10^9} \times 4 \times 10^{-2} \times 400 = \boxed{Q_1 = 18 \text{ [nC]}}$$

2

2.a. Les conducteurs  $A$  et  $B$  sont en équilibre statik (Fig. 623.1)

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 = 18 \text{ [nC]} \quad \text{et} \quad Q_{\text{ext}} = -Q_1 = -Q_2 = -18 \text{ [nC]}$$

La sphère conductrice  $B$  est neutre et isolée  $\Rightarrow$  Conservation de la charge électrique totale



$$\Rightarrow Q_{\text{ext}} + Q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{\text{ext}} = -Q_{\text{int}} = +Q_0 = +18 \text{ nC}}$$

2b) En présence des charges  $Q_{\text{ext}} = Q_{\text{int}}$ , le potentiel de la sphère conductrice à charge, il devient :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_r \frac{q_r}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{R_1} - \frac{Q_0}{R_1} + \frac{Q_0}{R_1} \right)}$$

■ L'influence totale modifie le potentiel d'un conducteur isolé et maintenu fixe sa charge électrique.

Le potentiel de la sphère conductrice B s'écrit :

$$\boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ext}}}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_2}}$$

2c) En présence des charges  $Q_{\text{ext}} = Q_{\text{int}}$ , le potentiel de la sphère conductrice à charge, il devient :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_r \frac{q_r}{r} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{R_1} - \frac{Q_0}{R_1} + \frac{Q_0}{R_2} \right)$$

■ L'influence totale modifie le potentiel d'un conducteur isolé et maintenu fixe sa charge électrique.

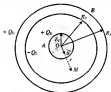


Fig. E23.1

Le potentiel de la sphère conductrice B s'écrit :  $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ext}}}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_2}$

Application numérique :  $R_1 = 3.10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_2 = 10.10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_1 = 1.1.10^{-1} \text{ m}$ ,  $Q_0 = 18 \text{ nC}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

On obtient :  $\boxed{V_A = 1.652,73 \text{ [V]}}$  et  $\boxed{V_B = 1.472,72 \text{ [V]}}$



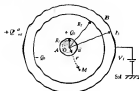


Fig. E23.2

3.b En présence des charges  $Q_{\text{int}}^{\text{ext}}$  et  $Q_{\text{ext}}^{\text{ext}}$ , le potentiel de la sphère conductrice A change, il devient :

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} \Rightarrow V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_{\text{ext}}^{\text{ext}}}{R_1} \right)$$

Application numérique :  $R_1 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_2 = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_3 = 11 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $Q_1 = 18 \text{ nC}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ .

On obtient :  $V_A = 2,880 \text{ V}$

4.

4.a Le conducteur A ne charge (cf. 3b) : il porte la charge  $Q_1' = Q_1$

Les conducteurs A et B sont en influence totale (Fig. E23.3)  $\Rightarrow Q_{\text{ext}}^{\text{ext}} = -Q_1$

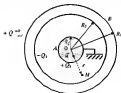


Fig. E23.3

La sphère conductrice de rayon  $a$  est isolée. Considérons-le à l'échelle d'un champ électrique nul :

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V = \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0 \quad \forall r > a$$

4b. La distribution de charges présente une symétrie sphérique. Pour nous faciliter le calcul, que le champ électrique soit nul :  $E(r) = E(r)/\epsilon_0$ . Donc, en raison de la symétrie de champ électrique, on choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$  :

$$\Rightarrow \quad R_1 < r < R_2$$

Considérons une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_1$  de rayon  $R_1 < r < R_2$ , l'application du théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_1 < r < R_2 :$$

Lorsque  $A$  est isolé, on voit par un fil fin de cuivre négligeable, un champ électrique nul en entre les armatures  $A$  et  $B$ , car les différences de potentiel  $V_A - V_B = -V'$ , n'est pas nulle :

$$\Delta V = V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Il en découle que le champ électrique est dirigé vers les potentiels croissants, c'est-à-dire de  $B$  vers  $A$ .

Choisissons maintenant une surface de Gauss  $\Sigma_2$  située dans l'espace intermédiaire ( $\Sigma_2$  compris entre  $A$  et  $B$ ). L'application du théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma_2} E \cos \alpha_1 \cdot dS = -\oint_{\Sigma_2} E \cos \alpha_2 \cdot dS = -E S = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_1 < 0,$$

Donc, le conducteur  $A$  se charge négativement.

D'après ce qui précède, on obtient :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1|}{r^2} \hat{e}_r, \text{ le champ électrique } \vec{E}(r) \text{ est dirigé de } B \text{ vers } A.$$

$$\Rightarrow \quad R_2 < r < R_3 :$$

Choisissons cette fois-ci, une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_3$  de rayon  $R_2 < r < R_3$ , l'application du théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_2 - Q_1}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_3 < r :$$

Choisissons encore une surface de Gauss sphérique  $\Sigma_4$  de rayon  $r > R_3$ , l'application du théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\oint_{\Sigma_4} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_2 - Q_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_3 + Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{Q_3 + Q_1}{\epsilon_0}$$

Finalement, on écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Pour déterminer les densités  $Q_1$ , on exprime la circulation du vecteur champ électrique  $\vec{E}_{ext}$  le long d'une ligne de champ entre un point M situé sur la conductrice B et un point d'essai A à l'extérieur :

$$\begin{aligned} W = V(\infty) - V(r_1) &= - \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} dr \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (Q_1 + Q_2) \left[ \frac{1}{r} \right]_A^{\infty} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} \end{aligned}$$

avec :  $R_1 = r_1$  et  $V(R_1) = V_A$

Il résulte  $Q_1 + 4\pi\epsilon_0 R_1 V_A = Q_2$

4 c. Pour déterminer la densité  $V_A$ , on exprime la circulation du vecteur champ électrique  $\vec{E}_{ext}$  le long d'une ligne de champ, de  $r = R_2$  à  $r = R_1$  :

$$\begin{aligned} \int_A^{\infty} dW &= - \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1|}{r^2} dr \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1} \\ &+ V_A = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |Q_1| \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^{R_2} = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \end{aligned}$$

On obtient :  $V_A = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right]$

Puisque  $Q_1 < 0$ , on peut écrire :  $V_A = - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right]$

On en déduit l'expression de la charge  $Q_1$  portée par la sphère A :

$$Q_1 = - \frac{Q_2 R_1 R_2}{[R_1 R_2 + R_2 (R_2 - R_1)]}$$

Applications numériques :  $R_1 = 9 \cdot 10^{-2}$  m,  $R_2 = 10 \cdot 10^{-2}$  m,  $Q_2 = 11 \cdot 10^{-9}$  mC,  $Q_2 = 1.88 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>.

$$Q_1 = - \frac{11 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{[9 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} + 11 \cdot 10^{-2} \cdot (1 \cdot 10^{-2})]} = Q_1 = -13.366 \text{ [nC]}$$

$$Q_{ext} = +5 - 13.366 = Q_{ext} = -8.366 \text{ [nC]}$$

$$V_A = 13.366 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \left[ \frac{(10-9) \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} \right] = V_A = 130.7 \text{ [V]}$$

$$\text{Vérification : } V_1' = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left[ \frac{1}{R_1} \right] = V_1' = -1,64 \times 10^3 \frac{1}{\text{m}} \Rightarrow \frac{1}{\text{m}} \Rightarrow \boxed{V_1' = (31,7) \text{ V}}$$

### Exercice 24 : Coefficients d'influence

On considère deux sphères métalliques  $S_1$  et  $S_2$ , ayant respectivement pour centres  $O_1$  et  $O_2$  et pour rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Elles portent respectivement les charges  $Q_1$  et  $Q_2$ . Les deux sphères sont placées à une grande distance l'une de l'autre ( $O_1O_2 = a$ , avec  $a \gg R_1$  et  $a \gg R_2$ ).

1. Calculer les potentiels aux centres  $O_1$  et  $O_2$  des sphères.
2. En exprimant les potentiels en fonction des charges des conducteurs, on arrive à une relation de la forme :

$$V_i = \sum_{j=1}^2 p_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Déterminer les coefficients  $P_{ij}$  de la matrice  $[p]$  du système.

3. En déduire la matrice  $[c]$  du système; exprimer les coefficients de capacité et d'influence des deux sphères. Comparer le coefficient de capacité  $C_{11}$  à la capacité d'une sphère seule, isolée dans l'espace.

Applications numériques:  $R_1 = R_2 = 6 \text{ cm}$ ,  $a = 60 \text{ cm}$ .

**Solution :**

1. Le potentiel de la sphère  $S_1$  s'écrit :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_r \frac{Q_r}{r} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{a} \right)$$

Le potentiel de la sphère  $S_2$  s'écrit :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{a} \right)$$

2. Il en découle de la question précédente, le système d'équations :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} Q_2 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} Q_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

Il s'écrit en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [p] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

3) Les deux plaques sont scindées en  $S_1$  et  $S_2$ , se influencent mutuellement, sont portées respectivement aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . On détermine les coefficients de couplage:

$$V_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$V_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

La correspondance entre les potentiels et les charges peut être représentée dans la forme matricielle, comme suit:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}; \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Le matrix  $[C]$  des coefficients d'influence est l'inverse de la matrix  $[P]$ . Cette matrix est inversible, car son déterminant est non nul.

Calcul du déterminant  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[ \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{a^2} \right] = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left( \frac{a^2 - R_1 R_2}{a^2 R_1 R_2} \right) \neq 0$$

Le système d'équations précédentes peut être résolu de façon unique:

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \\ V_2 & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}; \quad Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} & V_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} & V_2 \end{vmatrix}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}$$

où sous une forme plus explicite:

$$Q_1 = \frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0 R_2}{a} V_1 - \frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0}{a} V_2; \quad Q_2 = -\frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0}{a} V_1 + \frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{a} V_2$$

$$C = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0 R_2}{a} & -\frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0}{a} \\ -\frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0}{a} & \frac{1}{\Delta} \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 a^2}{a^2 - R_1 R_2} & -\frac{4\pi\epsilon_0 a R_2 R_1}{a^2 - R_1 R_2} \\ -\frac{4\pi\epsilon_0 a R_1 R_2}{a^2 - R_1 R_2} & \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 a^2}{a^2 - R_1 R_2} \end{pmatrix}$$

On se détermine les coefficients de capacité d'inductance :

$$C_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2 \epsilon'}{d^2 - R_1^2}, \quad C_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2^2 \epsilon'}{d^2 - R_2^2},$$

$$C_{12} = C_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \epsilon'}{d^2 - R_2^2}.$$

La capacité est grande si vers  $R_1$  et  $R_2$  on obtient :

$$C_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2 \epsilon'}{1 - \frac{R_1^2}{d^2}} = 4\pi\epsilon_0 R_1^2 \left(1 + \frac{R_1^2}{d^2}\right)$$

$$C_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2^2 \epsilon'}{1 - \frac{R_2^2}{d^2}} = 4\pi\epsilon_0 R_2^2 \left(1 + \frac{R_2^2}{d^2}\right)$$

$$C_{12} = C_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \epsilon'}{d^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{d^2}\right)} = -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d} \left(1 + \frac{R_2^2}{d^2}\right) = -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d}$$

Application numérique pour  $R_1 = R_2 = 6 \text{ cm}$ ,  $d = 62 \text{ cm}$

$$C_{11} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \left(1 + \frac{36 \cdot 10^{-4}}{3844}\right) \Rightarrow C_{11} = 9,08 \cdot 10^{-12} \text{ [F]} = 9,08 \text{ [pF]}$$

$$C_{22} = 9,08 \cdot 10^{-12} \text{ [F]} = 9,08 \text{ [pF]}$$

$$C_{12} = C_{21} = -\frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{3844}$$

$$C_{12} = C_{21} = -1,11 \cdot 10^{-13} \text{ [F]} = -1,11 \text{ [pF]}$$

### Exercice E24 — Electromètre à plateaux

Un électromètre, représenté schématiquement sur la figure E24, est utilisé pour mesurer des différences de potentiel. Il se compose d'une balance dont le plateau de gauche est un disque  $D$  de surface  $S$  placé à une distance  $a$  d'un plateau  $P$  horizontal, constituant ainsi un condensateur plan. Les armatures  $D$  et  $P$  sont respectivement aux potentiels  $V_D$  et  $V_P$ .

1. Calculer l'énergie électrostatique du système.
2. Quand une différence de potentiel est appliquée entre le disque et le plan, une force verticale dirigée vers le bas agit sur le disque. Déterminer la force  $F$  qui s'exerce sur le disque  $D$ . Quelle est son intensité, sachant que  $V_D = V_1$  et  $V_P = 0$  (Fig. E25).
3. Dans les conditions précédentes, quelle charge  $q$  faut-il placer sur l'autre plateau pour maintenir l'équilibre.

Remarque : dans l'instrument réel, le disque est entouré d'un anneau de garde porté au même potentiel, pour faire en sorte que le champ soit uniforme, sur toute la surface du disque.



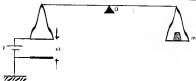


Fig. E25

**Solution :**

1. Les disques  $D$  et le plateau  $P$  constituent les armatures d'un condensateur plan de capacité (cf. cours) :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

L'énergie électrostatique du système est : 
$$E_e = \frac{1}{2} C (V_D - V_P)^2$$

2. Les deux armatures du condensateur sont dans le disque  $D$ , protégé électriquement par un réseau de garde et l'autre, le plateau  $P$ . La charge de chaque  $D$  est :

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} (V_D - V_P)$$

Elle est répartie uniformément avec la densité surfacique :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\epsilon_0}{d} (V_D - V_P)$$

L'influence étant totale, il apparaît sur la surface de plateau  $P$ , une charge électrique égale et opposée, répartie uniformément avec la densité  $-\sigma$ .

La charge de  $P$  crée un champ électrique uniforme  $\vec{E}(P) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$  normal aux armatures, dirigé du l'armature  $D$  (positive) vers l'armature  $P$  (négative). L'action de ce champ sur la charge répartie sur le disque  $D$  est équivalente à une force  $\vec{f}$  passant par le centre du disque, telle que :

$$\vec{f} = Q_s \vec{E}(P) = \sigma S \vec{E}(P) = -\frac{\sigma \epsilon_0 S}{2} \vec{k}, \quad \text{soit} \quad \vec{f} = \vec{f}$$

Soit :

$$\vec{f} = -\frac{\epsilon_0 S}{2 d} (V_D - V_P)^2 \vec{k} = -\frac{\epsilon_0 S}{2 d^2} V_D^2 \vec{k}$$

La force entre les armatures est toujours attractive, car elle est proportionnelle au carré de la d.d.p. appliquée entre les armées des condensateur plan.

3. la réaction chimique élémentaire  $(V_1 - V_2) = V_2$  est exothermique, une destruction de la réaction, il apparaît une force électromotrice venant de la réaction, qui maintient l'équilibre de la balance à l'aide de la contre-électromotrice.

La balance est en équilibre (de réaction) lorsque la somme des actions de réaction par rapport à l'équilibre.

$$\overline{M_{1,ext}} + \overline{M_{2,ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (f + l - p) d = 0 \quad \text{à l'équilibre de la balance.}$$

En dérivant:

$$\frac{d^2}{2d^3} (V_1 - V_2)^2 = mg$$

Par conséquent

$$m = \frac{f_0 \beta}{2 d^3 l} (V_1 - V_2)^2 = \frac{d_0 \beta}{2 d^3 l} V_1^2$$



# ELECTRICITE

## 1 ELECTROSTATIQUE

Exercices corrigés  
Mohamed AKB

### L'ouvrage

Ce recueil de 25 exercices d'électrostatique complète parfaitement le livre de cours. Il offre à l'étudiant un outil efficace d'entraînement et de révision.

Pour bien utiliser cet ouvrage, l'étudiant doit :

- maîtriser parfaitement les bases du cours;
- acquiescer progressivement une méthode pour analyser et résoudre les exercices;
- chercher par lui-même chaque solution et la comparer avec celle proposée dans cet ouvrage.

Ainsi, l'étudiant pourra s'auto-évaluer et profiter pleinement de ce recueil.

**Le public :** étudiants de licence et d'ingénierie.

### L'auteur :

**Mohamed AKB :** Docteur d'état, enseigne actuellement la Physique au premier cycle universitaire et en ingénierie; il poursuit des recherches sur les puits d'ion électrique.

Pour plus d'exercices corrigés (150) d'électrostatique, consultez les ouvrages rédigés par le même auteur dans la collection **Physique**.



PRINX. PUBLIC : 150 DA